

ЗАПРЕЩЕННЫЕ УГЛЫ ИЗЛУЧЕНИЯ КВАНТОВЫХ АНТЕНН

И. А. Пешко

УДК 535.14

Институт физики НАН Беларуси,
Минск, Беларусь; e-mail: i.peshko@ifanbel.bas-net.by

(Поступила 24 июня 2021)

Исследована квантовая антенна, состоящая из набора двухуровневых атомов, расположенных на одной прямой и находящихся в различных начальных состояниях. Показано, что если начальное состояние квантовой антенны представляет собой симметричное состояние Дике, то для нее возможно полное подавление излучения в определенных направлениях. Вероятность одновременного обнаружения фотонов по таким направлениям равна нулю. Этот результат невозможен для псевдоклассического симметричного начального состояния антенны, которое не имеет квантовой запутанности, и для этого состояния вероятность обнаружить фотон под любым углом всегда отлична от нуля. Описано качественное отличие механизма интерференции для псевдоклассических и квантовых состояний антенны.

Ключевые слова: квантовая антенна, корреляционная функция, квантовая запутанность, состояние Дике, квантовая интерференция.

A quantum antenna consisting of a set of two-level atoms situated on one straight line and prepared in different initial states is investigated. It is shown that if the initial state of a quantum antenna is a symmetric Dicke state, then for it a total suppression of radiation in definite directions is possible. Probability of simultaneous photon detections in these directions is equal to zero. This result is impossible for the pseudo-classical symmetric initial state of the antenna, which does not have quantum entanglement, and for such a state the probability of detecting a photon at any angle is always nonzero. The qualitative difference of the interference mechanism for the pseudo-classical and quantum antenna states is described.

Keywords: quantum antenna, correlation function, quantum entanglement, Dicke state, quantum interference.

Введение. В последнее время большой интерес привлекают квантовые системы, состоящие из набора квантовых излучателей — квантовых антенн [1]. Для описания таких систем требуется использование квантового формализма, поскольку квантовые антенны обладают рядом особенностей по сравнению с классическими аналогами. Одна из таких особенностей — способность управлять излучаемым полем, изменяя только начальное состояние антенны без изменения ее пространственной структуры [2, 3]. Поле антенны можно делать более локализованным [4] или, наоборот, подавлять его в определенных направлениях [5], добиваться сверх- и субизлучения [4], создавать так называемые “темные” состояния [2] и др. Исследования в области квантовых антенн имеют серьезную прикладную значимость. Эти системы могут играть роль источников в таких новых областях, как квантовая микроскопия [6, 7], квантовое зондирование [8], квантовые коммуникации [9], квантовые оптические компьютеры [10].

В настоящей работе проведено сравнение полей излучения квантовой антенны двух симметричных начальных состояний. В качестве квантовой антенны использован линейный массив, состоящий из одинаковых атомов, равноудаленных друг от друга. Атомы в антенне представлены в виде двухуровневой системы (ДУС), дипольные моменты которых направлены перпендикулярно антенне. Одно из состояний, которое назовем псевдоклассическим (ПК), представляет собой тензорное произве-

FORBIDDEN RADIATION ANGLES OF QUANTUM ANTENNAS

I. A. Peshko (B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; e-mail: i.peshko@ifanbel.bas-net.by)

дение одинаковых состояний отдельных атомов. Система в таком состоянии напоминает систему классических когерентных независимых источников. Второе начальное состояние — симметричное состояние Дике (СД) с нулевым полным дипольным моментом [11]. Интерференция поля антенны в состоянии ПК осуществляется исключительно за счет ненулевого дипольного момента излучателей, тогда как для СД — за счет квантовой запутанности излучателей [12].

Показано, что поле исследуемой квантовой антенны, находящейся в определенном СД, обладает качественными отличиями от поля антенны в состоянии ПК. Это отличие проявляется в существовании “запрещенных” углов, в направлении которых корреляционная функция равна нулю. Следует отметить, что для классических антенн вполне естественно, что интенсивность в определенных направлениях нулевая [13, 14], однако в квантовом случае возникновение такого эффекта осложняется дробовым шумом, возникающим из-за дискретности фотонов.

Начальные состояния квантовой антенны. Рассматриваемая квантовая антенна состоит из M двухуровневых атомов, находящихся на одной прямой (рис. 1). Можно показать, что состояние такой квантовой системы в самом общем случае характеризуется $2^{M+1} - 1$ действительными величинами. Главный предмет интереса данной работы — различие эффектов классической пространственной интерференции излучателей антенны и эффектов квантовой интерференции, возникающих в силу перепутанности излучателей антенны. Потому рассматриваются два различных полностью симметричных начальных состояния антенны. Первое состояние — ПК, волновой вектор которого есть тензорное произведение волновых векторов отдельных атомов:

$$|\Psi_{\text{ПК}}^{m,M}\rangle = \prod_{j=1}^M \otimes (\sqrt{1-\frac{m}{M}} |g_j\rangle + \sqrt{\frac{m}{M}} |e_j\rangle), \quad (1)$$

где $|g_j\rangle$ ($|e_j\rangle$) — вектор основного (возбужденного) состояния j -го атома; M — количество атомов в антенне; m — среднее число возбуждений в антенне. В состоянии (1) атомы независимы друг от друга, т. е. квантовая запутанность отсутствует.

Второе состояние — симметричное СД [11] с волновым вектором

$$|\Psi_{\text{СД}}^{m,M}\rangle = \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_m}^M \sqrt{\frac{(M-m)!}{m!M!}} |e_{j_1}, \dots, e_{j_m}\rangle, \quad (2)$$

где $|e_{j_1}, \dots, e_{j_m}\rangle$ — состояние квантовой антенны, когда атомы $j_1, \dots, j_m$ возбуждены, а остальные находятся в основном состоянии. В отличие от (1) состояние (2) имеет квантовую запутанность. То, что состояние ПК является симметричным, позволяет представить его как суперпозицию СД:

$$|\Psi_{\text{ПК}}^{m,M}\rangle = \sum_{s=0}^M C_s^{m,M} |\Psi_{\text{СД}}^{s,M}\rangle, \quad (3)$$

где $C_s^{m,M} = \sqrt{\frac{M!}{s!(M-s)!}} \sqrt{1-\frac{m}{M}}^{M-s} \sqrt{\frac{m}{M}}^s$ — коэффициент разложения. Разложение (3) оказывается очень полезным для сравнения полей излучения квантовой антенны в состояниях ПК и СД.

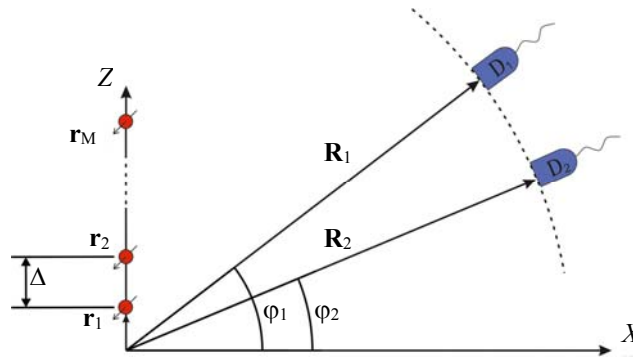


Рис. 1. Схема исследуемой квантовой антенны, состоящей из M двухуровневых атомов,

$\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор атомов $\mathbf{r}_j$; Δ — расстояние между атомами;

$\mathbf{R}_j$ — положение детектора D_j ; φ — угол к детектору от оси X

Поле квантовой антенны. Известно, что для линейного набора одинаковых ДУС положительно-частотная часть оператора электромагнитного поля, дающая ненулевой вклад в нормально упорядоченные корреляционные функции в точке R в дальней зоне поля, имеет вид [14, 15]:

$$\hat{\mathbf{E}}^+(R) \propto \sum_j \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu}_j]}{|R|} \exp(-ik|r_j - R|) \hat{\sigma}_j^-, \quad (4)$$

где $\hat{\sigma}_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$ — понижающий оператор для j -го атома, $\boldsymbol{\mu}_j$ — вектор дипольного момента j -го атома, r_j — положение j -го атома, $k = \omega/c$, ω — частота испускаемого фотона, c — скорость света; $\mathbf{n} = \mathbf{R}/|R|$ — единичный вектор в направлении точки R . Отрицательно-частотная часть оператора электромагнитного поля $\hat{E}^- = (\hat{E}^+)^+$. Полагаем, что вектор дипольного момента каждого атома направлен перпендикулярно плоскости Oxz , в которой могут находиться детекторы¹. Тогда положительно-частотная часть оператора поля, дающая ненулевой вклад в нормально упорядоченные корреляционные функции, с использованием приближения дальнего поля упрощается:

$$\hat{E}^+(\varphi) \propto \sum_{j=1}^M \exp(-i\varphi^{(j)}) \hat{\sigma}_j^-, \quad (5)$$

где $\varphi^{(j)} = k\Delta_j \sin\varphi$, Δ — расстояние между атомами, φ — угол к точке R относительно оси x .

На основе (5) запишем выражения для интенсивности

$$I(\varphi) = \langle E^-(\varphi) E^+(\varphi) \rangle \propto \sum_{j,l=1}^M \langle \sigma_j^+ \sigma_l^- \rangle \exp(i(\varphi^{(j)} - \varphi^{(l)})) \quad (6)$$

и корреляционной функции второго порядка

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2) &= \langle E^-(\varphi_1) E^-(\varphi_2) E^+(\varphi_2) E^+(\varphi_1) \rangle \propto \\ &\propto \sum_{j,l,n,q=1}^M \langle \sigma_j^+ \sigma_n^+ \sigma_q^- \sigma_l^- \rangle \exp(i(\varphi_1^{(j)} - \varphi_1^{(l)})) \exp(i(\varphi_2^{(n)} - \varphi_2^{(q)})), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\langle \dots \rangle$ — квантово-механическое среднее.

Интенсивность. С использованием (1) и (5) для интенсивности поля квантовой антенны, изначально находящейся в состоянии ПК, получаем:

$$I_{|\Psi_{\text{ПК}}^{m,M}\rangle}(\varphi) \propto \frac{m^2}{M} + \frac{m(M-m)}{M^2} \frac{\sin^2\left(\frac{k\Delta M}{2} \sin(\varphi)\right)}{\sin^2\left(\frac{k\Delta}{2} \sin(\varphi)\right)}. \quad (8)$$

Аналогично, используя (2) и (5), получаем интенсивность для состояния СД [4]:

$$I_{|\Psi_{\text{СД}}^{m,M}\rangle}(\varphi) \propto \frac{m(m-1)}{M-1} + \frac{m(M-m)}{M(M-1)} \frac{\sin^2\left(\frac{k\Delta M}{2} \sin(\varphi)\right)}{\sin^2\left(\frac{k\Delta}{2} \sin(\varphi)\right)}. \quad (9)$$

Введем видность распределения интенсивности

$$v = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (10)$$

Тогда из (8) следует, что видность интенсивности квантовой антенны в состоянии ПК

$$v_{\text{ПК}} = 1 / \left(1 + \frac{2m}{M(M-m)} \right). \quad (11)$$

Из (9) следует, что видность интенсивности для состояния СД [4]

$$v_{\text{СД}} = 1 / \left(1 + \frac{2(m-1)}{M(M-m)} \right). \quad (12)$$

¹ Вообще говоря, для такой антенны в направлении, перпендикулярном плоскости Oxz , корреляционная функция для любого начального состояния равна нулю. Однако нами сделан акцент на качественных отличиях квантовой интерференции от классической в плоскости, перпендикулярной диполям.

Как следует из (11), ни при каком $m > 0$ видность для ПК не достигает 100 %. Это означает, что в любом направлении в плоскости OXZ интенсивность не равна нулю. Если начальное состояние квантовой антенны СД, то из (12) следует, что при $m = 1$ видность достигает 100 %, т. е. существует такое направление φ , в котором интенсивность равна нулю.

На рис. 2 построена диаграмма направленности для ряда состояний квантовой антенны, состоящей из семи атомов, включая состояние СД с одним возбуждением.

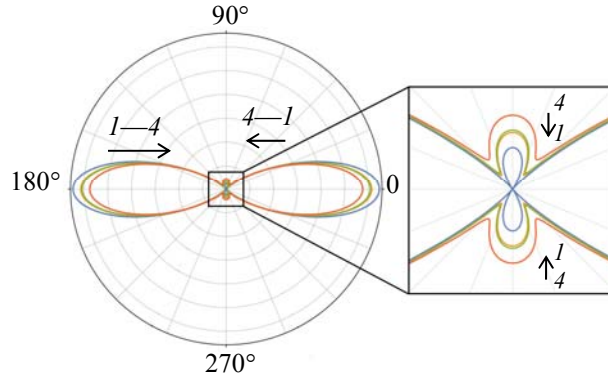


Рис. 2. Диаграммы направленности интенсивности $I(\varphi)$ квантовой антенны, состоящей из семи атомов, для четырех начальных состояний; $k\Delta = 1$: $|\Psi_{\text{СД}}^{1,7}\rangle$ (1), $|\Psi_{\text{ПК}}^{1,7}\rangle$ (2), $|\Psi_{\text{СД}}^{2,7}\rangle$ (3) и $|\Psi_{\text{ПК}}^{2,7}\rangle$ (4)

Используя (3) и то, что состояния (2) являются ортогональными для разных m и оператор $\sigma_j^+ \sigma_l^-$ не меняет число возбуждений в антенне, интенсивность состояния ПК представим как сумму интенсивностей СД:

$$I_{|\Psi_{\text{ПК}}^{m,M}\rangle}(\varphi) \propto \sum_{s=1}^M |C_s^{m,M}|^2 I_{|\Psi_{\text{СД}}^{s,M}\rangle}(\varphi). \quad (13)$$

Выражение (13) подтверждает, что интенсивность антенны в состоянии ПК не имеет нулевых значений, так как только слагаемое, соответствующее $I_{\text{СД}}^{1,M}$, может быть равно нулю.

Квантовая антенна в СД при $m = 1$ имеет только одно возбуждение, распределенное по всем излучателям. Становится понятно, почему при измерении корреляций фотонов первого порядка, т. е. измерении интенсивности, нуль возможен только для этого состояния, так как для состояний с большим количеством фотонов всегда остаются неизмеренные фотоны, которые выступают в роли шума. В то же время из (3) следует, что квантовая антенна в состоянии ПК является суперпозицией всех СД, а значит, содержит состояния с фотонами вплоть до M , следовательно, для таких состояний антенны нулевые значения также отсутствуют. Аналогичную логику можно распространить на корреляции более высоких порядков.

Корреляционная функция второго порядка. После вычислений из (2) и (7) для корреляционной функции второго порядка для состояния $|\Psi_{\text{СД}}^{2,M}\rangle$ (очевидно, что для $m = 1$ она везде равна нулю) получаем:

$$G_{|\Psi_{\text{СД}}^{2,M}\rangle}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2) \propto \left[\sin\left(\frac{k\Delta M}{2} \sin \varphi_1\right) \sin\left(\frac{k\Delta M}{2} \sin \varphi_2\right) \sin\left(\frac{k\Delta}{2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)\right) - \sin\left(\frac{k\Delta}{2} \sin \varphi_1\right) \sin\left(\frac{k\Delta}{2} \sin \varphi_2\right) \sin\left(\frac{k\Delta M}{2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)\right) \right]^2 / \left[\sin(k\Delta \sin \varphi_1) + \sin(k\Delta \sin \varphi_2) - \sin(k\Delta (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)) \right]^2. \quad (14)$$

Аналитически показать, что выражение (14) может быть равно нулю, довольно проблематично, однако оказывается, что уравнение $G_{|\Psi_{\text{СД}}^{2,M}\rangle}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ действительно имеет целое множество реше-

ний. На рис. 3 приведены рассчитанные кривые в плоскости $\varphi_1^{(1)} = k\Delta \sin \varphi_1$ и $\varphi_2^{(1)} = k\Delta \sin \varphi_2$, описывающие точки, где корреляционная функция (14) квантовой антенны, состоящей из трех и четырех атомов, равна нулю. Численный анализ СД квантовой антенны с числом возбуждений, большим двух, показывает, что корреляционная функция не достигает в таких случаях нуля ни при каких параметрах антенны. Это свидетельствует в пользу обобщения результата, полученного ранее для интенсивности: корреляционная функция второго порядка исследуемой квантовой антенны имеет запрещенные углы, т. е. углы, вероятность обнаружить два фотона в которых равна нулю, только для состояния СД при $m = 2$.

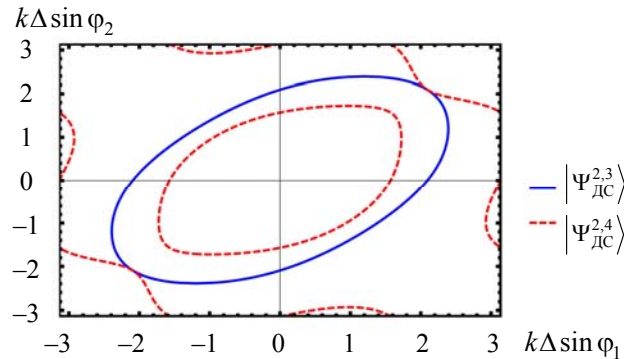


Рис. 3. Рассчитанные кривые $G^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2)$, описывающие точки в плоскости $\varphi_1^{(1)} = k\Delta \sin \varphi_1$ и $\varphi_2^{(1)} = k\Delta \sin \varphi_2$, где корреляционная функция второго порядка состояния Дике с двумя возбуждениями равна нулю

По аналогии с (13) для корреляционной функции второго порядка состояния ПК для произвольного m получаем:

$$G_{|\Psi_{ПК}^{m,M}\rangle}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2) \propto \sum_{s=2}^M |C_s^{m,M}|^2 G_{|\Psi_{СД}^{s,M}\rangle}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (15)$$

Из (15) следует аналогичный вывод, как из выражения (13). Единственное слагаемое в (15), которое может быть равным нулю, соответствует состоянию $|\Psi_{СД}^{2,M}\rangle$.

Квантовая антенна для метрологии. Описанная квантовая антенна может использоваться в качестве источника для различных схем квантовой метрологии. Важной задачей, демонстрирующей преимущества исследуемой антенны, является определение угла поворота антенны. Для этого удобно использовать информационный подход, основанный на матрице информации Фишера (МИФ). МИФ описывает информационное содержание всех восстанавливаемых параметров в регистрируемых данных, а именно в частотах срабатывания детекторов, и определяется как

$$FI_{ij} = \sum_{\forall l} \frac{1}{p_l(\mathbf{x})} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p_l(\mathbf{x}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p_l(\mathbf{x}) \right), \quad (16)$$

где FI_{ij} — матрица информации Фишера; $p_l(\mathbf{x})$ — набор вероятностей, описывающих измерение; $\mathbf{x}$ — вектор неизвестных параметров.

На практике МИФ неразрывно связана с неравенством Крамера—Рао, которое определяет нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки неизвестных параметров:

$$\Delta_i^2 \geq \frac{1}{N} [FI^{-1}]_{ii}, \quad (17)$$

где N — полное число зарегистрированных событий.

Предположим, что наша квантовая антенна (рис. 1) отклонилась от оси Z на небольшой угол $\delta\alpha$. Чтобы обнаружить это отклонение, проведем простое измерение интенсивности в двух направлениях, одно из которых $\varphi = 0$, другое произвольно. Как видно из (16), МИФ становится скаляром для одного неизвестного параметра.

Можно сравнить информационное содержание описанного измерения интенсивности о величине отклонения квантовой антенны $\delta\alpha$ для различных исследуемых состояний. На рис. 4 показана информация Фишера в зависимости от угла второго измерения φ для четырех начальных состояний. Видно, что наиболее информативным является симметричное СД с $m = 1$ $|\Psi_{\text{СД}}^{1,7}\rangle$. Однако МИФ не может отражать некоторые особенности измерения. Например, из (16) видно, чем ниже вероятность, тем больше член, соответствующий индексу данной вероятности. Это означает, что, хотя измерение, соответствующее малой вероятности, очень информативно, для сбора достаточной статистики для восстановления неизвестных параметров необходимо выполнить очень большое количество реализаций. Выше было показано, что интенсивность квантовой антенны в начальном состоянии $|\Psi_{\text{СД}}^{1,M}\rangle$ имеет запрещенные углы, т. е. вероятность регистрации фотона в этом направлении равна нулю, чего, например, нет для других начальных состояний. Так, $I_{|\Psi_{\text{СД}}^{m,M}\rangle}(1.114) = 0$ при $k\Delta = 1$, однако информации, соответствующей измерению в этом направлении, значительно больше, чем для других состояний (рис. 4). Тем не менее если рассматривать “нормальные” измерения, то в задаче обнаружения угла поворота антенны состояния СД с одним возбуждением имеют информационное преимущество при измерении интенсивности по сравнению с ПК состояниями и СД с большим числом возбуждений.

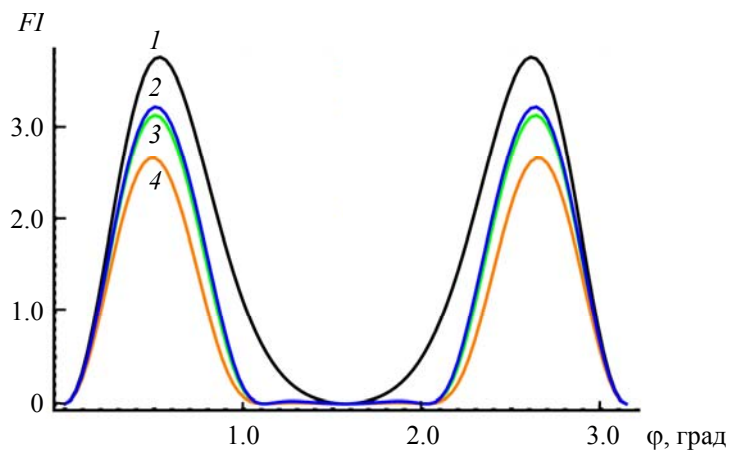


Рис. 4. Зависимость информации Фишера отклонения квантовой антенны при измерении интенсивности от угла второго измерения в случае первого измерения интенсивности под углом $\varphi = 0$ для четырех начальных состояний квантовой антенны; $k\Delta = 1$:

$$|\Psi_{\text{СД}}^{1,7}\rangle (1), |\Psi_{\text{ПК}}^{1,7}\rangle (2), |\Psi_{\text{СД}}^{2,7}\rangle (3) \text{ и } |\Psi_{\text{ПК}}^{2,7}\rangle (4)$$

Заключение. Исследована квантовая антенна, состоящая из набора атомов, расположенных на одной прямой, и излучающая в дальнее поле. Показано, что при определенных условиях, если квантовая антенна находится в симметричном состоянии Дике, возможны запрещенные углы. Это означает, что вероятность обнаружить фотон в таком направлении (или два фотона в таких направлениях) равна нулю. Этот результат невозможен для псевдоклассических состояний антенны с таким же средним числом возбуждений — аналога антенны, состоящей из набора классических независимых когерентных источников. Полученные результаты подтверждают, что квантовая интерференция (как следствие квантовой запутанности излучателей) имеет качественные отличия от классической интерференции (следствия ненулевого дипольного момента), которые оказываются полезными для квантовой метрологии. С использованием информационного подхода, основанного на матрице информации Фишера, в рамках задачи обнаружения угла поворота квантовой антенны продемонстрировано преимущество состояния Дике с квантовой запутанностью для квантовой метрологии.

Работа проведена при финансовой поддержке гранта НАН Беларуси (грант № 2021-25-164).

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук Д. С. Могилевцеву за плодотворное обсуждение работы.

-
- [1] **G. Y. Slepyan, S. Vlasenko, D. Mogilevtsev.** Adv. Quantum Technol., **3**, N 4 (2020) 1900120
 - [2] **A. Mikhalychev, D. Mogilevtsev, G. Y. Slepyan, I. Karuseichyk, G. Buchs, D. L. Boiko, A. Boag.** Phys. Rev. Appl., **9**, N 2 (2018) 024021
 - [3] **С. В. Власенко.** Журн. прикл. спектр., **87**, № 6 (2020) 936—940 [**S. V. Vlasenko.** J. Appl. Spectr., **87**, N 6 (2020) 1067—1071]
 - [4] **R. Wiegner, J. von Zanthier, G. S. Agarwal.** Phys. Rev. A, **84**, N 2 (2011) 023805
 - [5] **D. Bhatti, R. Schneider, S. Oppel, J. von Zanthier.** Phys. Rev. Lett., **120**, N 11 (2018) 113603
 - [6] **Y. Shih.** IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **13**, N 4 (2007) 1016—1030
 - [7] **S. Sidhu, P. Kok.** Phys. Rev. A, **95**, N 6 (2017) 063829
 - [8] **C. L. Degen, F. Reinhard, P. Cappellaro.** Rev. Mod. Phys., **89**, N 3 (2017) 035002
 - [9] **C. H. Bennett, P. W. Shor.** IEEE Transact. Inform. Theory, **44**, N 6 (1998) 2724—2742
 - [10] **J. L. O'Brien.** Science, **318**, N 5856 (2007) 1567—1570
 - [11] **R. H. Dicke.** Phys. Rev., **93**, N 1 (1954) 99—110
 - [12] **D. Bhatti, M. Bojer, J. von Zanthier.** arXiv:2105.04892 (2021)
 - [13] **M. Ma.** Theory and Application of Antenna Arrays, Wiley-Interscience, Jhon Wiley&Sons Inc. (1974)
 - [14] **C. A. Balanis.** Antenna Theory: Analysis and Design, Wiley-Interscience, USA (2005)
 - [15] **G. S. Agarwal.** Quantum Optics, Cambridge University Press (2012)