

ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ НУЛЕВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ**

И. В. Балыкин¹, А. А. Рыжевич^{1,2*}, Н. С. Казак³

УДК 535.3

¹ Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь;

e-mail: a.ryzhevich@dragon.bas-net.by

² Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

³ ГНПО “Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника”, Минск, Беларусь

(Поступила 3 марта 2023)

Проведено сравнение продольных распределений максимального значения интенсивности в бесселевых световых пучках (БСП) различных порядков с аналогичными распределениями в гауссовом и лагерр-гауссовых световых пучках соответствующих порядков. Вводится понятие “опасной зоны” БСП и предлагается метод для определения ее длины. Максимальное значение интенсивности I_0 исходного гауссова или лагерр-гауссова светового пучка изначально выбирается не выше предела лучевой прочности используемых оптических элементов и объектов. “Опасная зона” БСП — область пространства за аксиконом, в которой максимальная интенсивность БСП превышает I_0 . За длину “опасной зоны” принимается наибольшая дистанция z_K за аксиконом, для которой максимальная интенсивность в поперечном сечении БСП равна I_0 . Дополнительно определяется расстояние z_E от аксикона, на котором выравниваются интенсивности на оси БСП и в его периферийном кольцевом поле. В этом поперечном сечении максимальные интенсивности БСП 0-, 1- и 2-го порядков гарантированно меньше I_0 , но поперечный размер светового пучка еще не слишком велик. С помощью методов математического моделирования рассчитаны относительные (в единицах длины существования БСП z_{wl}) значения z_E и z_K для БСП нулевого и высших (с первого по девятый) порядков. Показано, что при проектировании оптических систем, использующих коническую геометрию БСП, объекты с низкой лучевой прочностью целесообразно размещать на дистанциях, больших z_K , причем наиболее энергоэффективным при том же заданном радиусе исходного лагерр-гауссова пучка по уровню I_0/e^2 является БСП 1-го порядка в области от z_K до z_E .

Ключевые слова: бесселев световой пучок, конический световой пучок, распределение интенсивности, зона существования бесселева светового пучка.

A comparison of the longitudinal distributions of the maximal intensity in Bessel light beams (BLB) of different orders with analogical distributions in Gaussian and Laguerre-Gaussian light beams of the corresponding orders is made. The concept of the “dangerous zone” of the BLB is introduced and the method for determining its length is proposed. The maximum value of the intensity I_0 of the initial Gaussian or La-

LONGITUDINAL DISTRIBUTION OF THE MAXIMAL INTENSITY IN BESSEL LIGHT BEAMS OF ZERO AND HIGHER ORDERS

I. V. Balykin¹, A. A. Ryzhevich^{1,2*}, N. S. Kazak³ (¹ B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; e-mail: a.ryzhevich@dragon.bas-net.by; ² Belarusian State University, Minsk, Belarus; ³ SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Belarus)

** Доложено на X Республиканской научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов “Актуальные вопросы физики и техники” 22 апреля 2021 г., Гомель (Беларусь), на международной научно-практической конференции “Компьютерные технологии и анализ данных” (CTDA-2022) 21—22 апреля 2022 г., Минск (Беларусь), и на международной школе-конференции молодых ученых и специалистов “Современные проблемы физики” 27—29 апреля 2022 г., Минск (Беларусь).

guerre-Gaussian light beam is initially chosen not to exceed the optical damage threshold of the optical elements and objects used. The “dangerous zone” of the BLB is a region of space behind the axicon, in which the maximum intensity value in the BLB exceeds I_0 . The length of the “dangerous zone” is taken to be the largest distance z_K behind the axicon, for which the maximum intensity in the cross section of the BLB is equal to I_0 . Additionally, the distance z_E from the axicon is determined, at which the intensity values on the BLB's axis and in its peripheral annular field are aligned. In this cross section the maximum intensity values in the BLB of the 0th, 1st, and 2nd orders are guaranteed to be less than I_0 , but the transverse size of the light beam is not yet too large. With the help of mathematical modeling methods the relative (in units of the BLB's existence length z_{wl}) values z_E and z_K for the zero and higher (from the first to the ninth) orders of the BLB are calculated. It is shown that when designing optical systems using the conical geometry of the BLB, it is advisable to place objects with low optical damage threshold at distances greater than z_K , and the most energy efficient for the same given radius of the initial Laguerre-Gaussian beam in terms of the level I_0/e^2 is the 1st order BLB in the region from z_K to z_E .

Keywords: Bessel light beam, conical light beam, intensity distribution, zone of the Bessel light beam existence.

Введение. В настоящее время значительный интерес представляют бesselевы световые пучки нулевого порядка (БСП₀) — аксиально симметричные когерентные световые поля, радиальное распределение интенсивности в поперечном сечении которых описывается квадратом функции Бесселя нулевого порядка [1], а волновые векторы лежат на поверхности конуса. В описании БСП₀, сформированных аксиконом из гауссовых лазерных пучков конечных размеров, присутствует также функция Гаусса, поэтому их также называют бessel-гауссовыми [2]. Характерная особенность БСП₀ — наличие у них протяженного узкого осевого максимума интенсивности, диаметр которого может практически не изменяться во всей зоне существования БСП₀ [1]. Наряду с БСП₀ существуют БСП высших порядков (БСП_{*n*}, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — целое число) [3, 4]. Волновые векторы в БСП_{*n*} также лежат на конической поверхности, однако вследствие наличия в световом поле винтовой дислокации волнового фронта (ВДВФ) порядка n вдоль оси БСП_{*n*} наблюдается нулевой минимум интенсивности, окруженный наиболее ярким приосевым максимумом в виде круглого осесимметричного кольца. Наиболее энергетически эффективным и распространенным методом формирования БСП₀ и БСП_{*n*} является преобразование с помощью конических линз (аксиконов), соответственно, гауссовых световых пучков без ВДВФ и лагерр-гауссовых пучков (ЛГП_{*n*}) с ВДВФ порядка n (рис. 1).

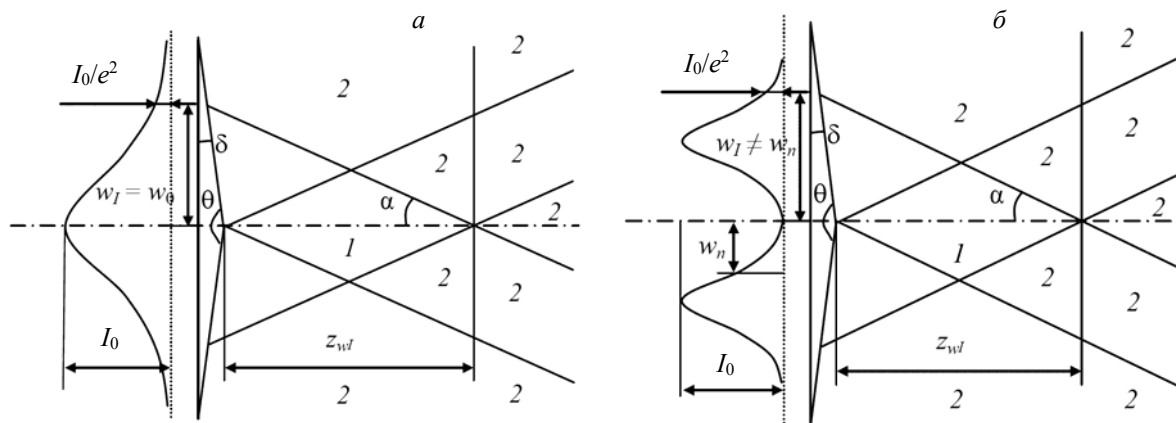


Рис. 1. Схема формирования БСП нулевого (а) и высших (б) порядков:

1 — зона существования БСП, 2 — небesselев конический световой пучок

Определение зоны существования БСП. Зона существования БСП₀ геометрически представляет собой ромбоид вращения, ограниченный парциальными световыми пучками, выходящими из области при вершине аксикона и из окружности радиусом $w_l = w_0$, где w_0 — радиус (полуширина) исходного гауссова пучка по уровню I_0/e^2 (I_0 — максимальная интенсивность этого пучка, $e = \exp(1) \approx 2.718$) (рис. 1, а). Зоной существования БСП высших порядков предлагается считать аналогичный ромбоид (рис. 1, б), образованный парциальными лучами, выходящими из точек с ради-

альной координатой w_l . Для этих точек интенсивность лагерь-гауссовых пучков порядка n , если перемещаться по радиусу от оси пучка к периферии, после достижения максимального значения I_0 спадает до уровня I_0/e^2 . Радиус w_l по уровню I_0/e^2 связан с радиусом w_n лагерь-гауссова пучка n -го порядка (ЛГП $_n$) формулой (вывод формулы см. Приложение А):

$$w_l(n) = w_n \sqrt{-\frac{|n|}{2} W_{-1} \left(-e^{-1-2/|n|} \right)}, \quad (1)$$

где W_{-1} — -1 -я ветвь W -функции Ламберта (по определению, это функция, обратная к функции $f(x) = xe^x$) [5].

Полагается, что распределение интенсивности в радиальном распределении ЛГП $_n$ имеет вид

$$I_n(r) = I_0 (2e/n)^n (r/w_n)^{2n} \exp \left[-2(r/w_n)^2 \right], \quad (2)$$

где r — радиальная координата. Множитель $(2e/n)^n$ необходим для того, чтобы максимум $I_n(r)$ по r равнялся I_0 (обоснование см. Приложение Б).

Радиус w_n ЛГП $_n$ при $n \neq 0$ не совпадает с внешним радиусом по уровню I_0/e^2 , поэтому не пригоден для определения зоны существования БСП $_n$. Длиной зоны существования БСП всех порядков является расстояние $z_{wl} = w_l/\tan(\alpha) \approx w_l/\tan[(n_o - 1)\delta]$, где n_o — показатель преломления материала аксикона, δ — угол при основании аксикона. При $n_o = 1.5$, $z_{wl} \approx 2w_l/\tan(\delta)$. С точки зрения применения БСП различных порядков в науке и технологиях целесообразно провести сравнение продольных распределений максимальных интенсивностей в БСП нулевого и высших порядков, полученных с помощью аксикона из гауссова и лагерь-гауссовых световых пучков.

Определение понятия “опасная зона” БСП. Вне ромбоидальной зоны существования БСП также присутствует световое поле, которое является частью распространяющегося после аксикона светового пучка и обладает конической геометрией. Строго говоря, это поле не является в полном смысле БСП. Только в приосевой области за зоной существования БСП распределение интенсивности описывается квадратом функции Бесселя, поэтому световое поле за аксиконом вне зоны существования БСП иногда называют небесселевым коническим световым пучком.

На рис. 2 показаны полученные в результате численного эксперимента диаметральные распределения интенсивности пучка в плоскости максимальной интенсивности БСП для порядков $n = 0, 1, 2, 5, 7, 9$, сформированные идеальным по форме и идеально просветленным аксиконом с углом при основании $\delta = 5^\circ$ и показателем преломления материала 1.5 из гауссова и лагерь-гауссовых пучков соответствующих порядков с радиусом $w_l = 2.5$ мм и длиной волны $\lambda = 0.633$ мкм. Приведены также диаметральные распределения интенсивности гауссова и ЛГП для порядков $n = 1, 2, 5, 7, 9$, сфокусированных положительной сферической линзой с фокусным расстоянием 50 мм в ее фокальной плоскости. Угол при основании аксикона и фокусное расстояние линзы выбраны такими, чтобы диаметры максимумов интенсивности в поперечных сечениях БСП и минимальные диаметры максимумов интенсивности сфокусированных сферической линзой гауссова и лагерь-гауссовых световых пучков в фокальной плоскости линзы были примерно одинаковыми. На рис. 3 показаны продольные распределения максимальной интенсивности в БСП различных порядков и максимальной интенсивности светового пучка в области вблизи фокальной плоскости сферической линзы.

Из рис. 2 и 3 видно, что сферическая линза формирует из гауссова (ГП) или ЛГП $_n$ короткий по длине (< 1 мм) пик интенсивности примерно такой же ширины, как и БСП соответствующего порядка, с экстремально высокой интенсивностью (до $4 \cdot 10^5 I_0$). В свою очередь пики интенсивности всех БСП при существенно меньшей интенсивности (от $\sim 5 \cdot 10^2 I_0$ при $n = 9$ до $\sim 2 \cdot 10^3 I_0$ при $n = 0$) имеют значительно большую протяженность (от 40 мм при $n = 9$ до 100 мм при $n = 0$). При этом проявляется следующая закономерность: с повышением порядка n БСП или лагерь-гауссова пучка увеличивается поперечный размер осевого/приосевого максимума интенсивности и, соответственно, уменьшается пиковое значение интенсивности для всех поперечных сечений пучков. Следует отметить, что даже за зоной существования БСП максимальные интенсивности в поперечном сечении существенно превышают максимальную интенсивность I_0 исходного пучка. При этом для БСП $_0$ интенсивность осевого пика почти в 1000 раз больше, чем I_0 (рис. 3, а), и даже для БСП $_9$ пиковая интенсивность в приосевом кольце в ~ 100 раз превышает I_0 (рис. 3, б).

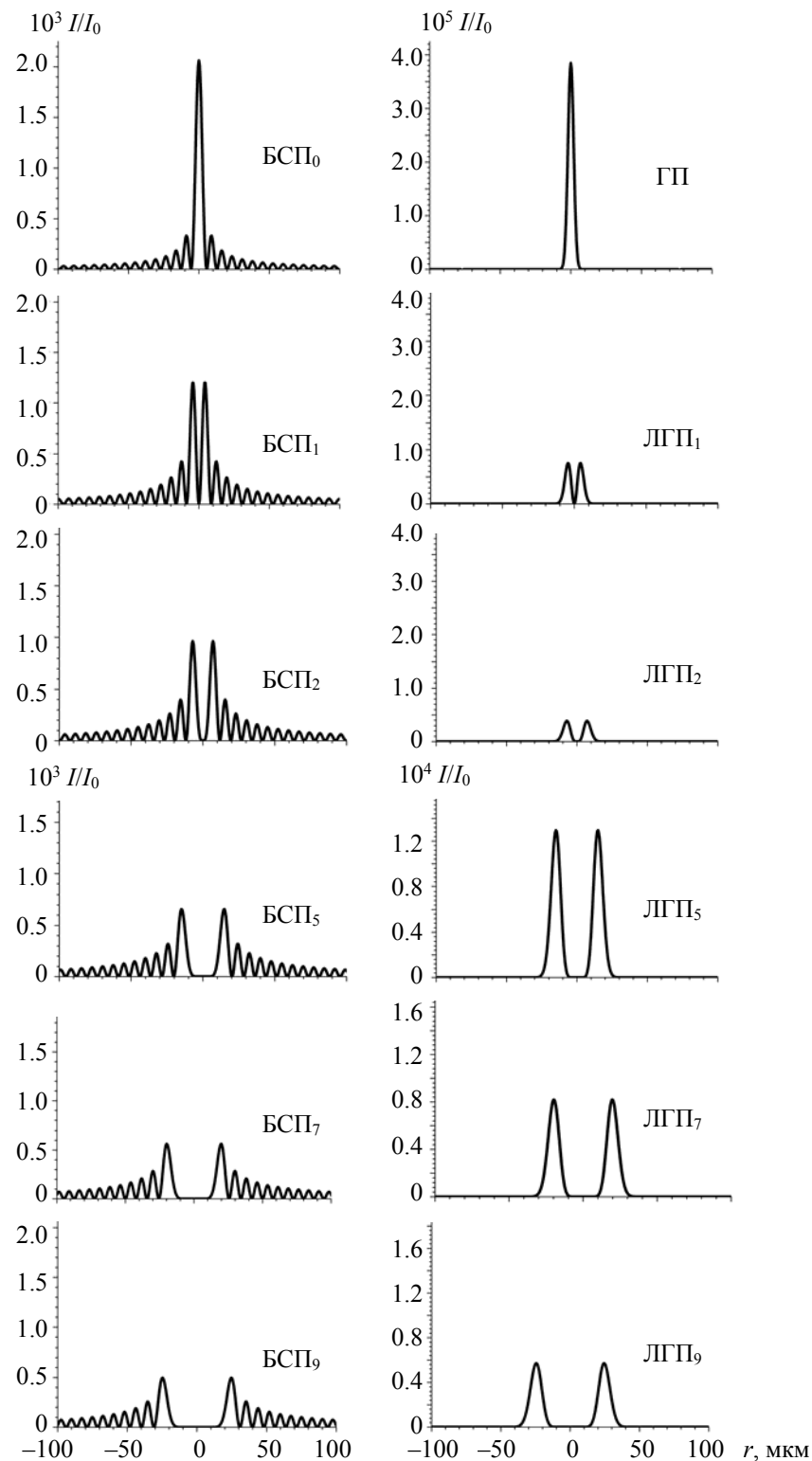


Рис. 2. Диаметральные распределения интенсивности в БСП, формируемом аксиконом с углом при основании 5° из гауссова/лагерр-гауссова пучка в плоскости максимальной интенсивности, и для лагерр-гауссова пучка в фокусной плоскости линзы с фокусным расстоянием 50 мм при одинаковом размере и максимальной интенсивности входного пучка

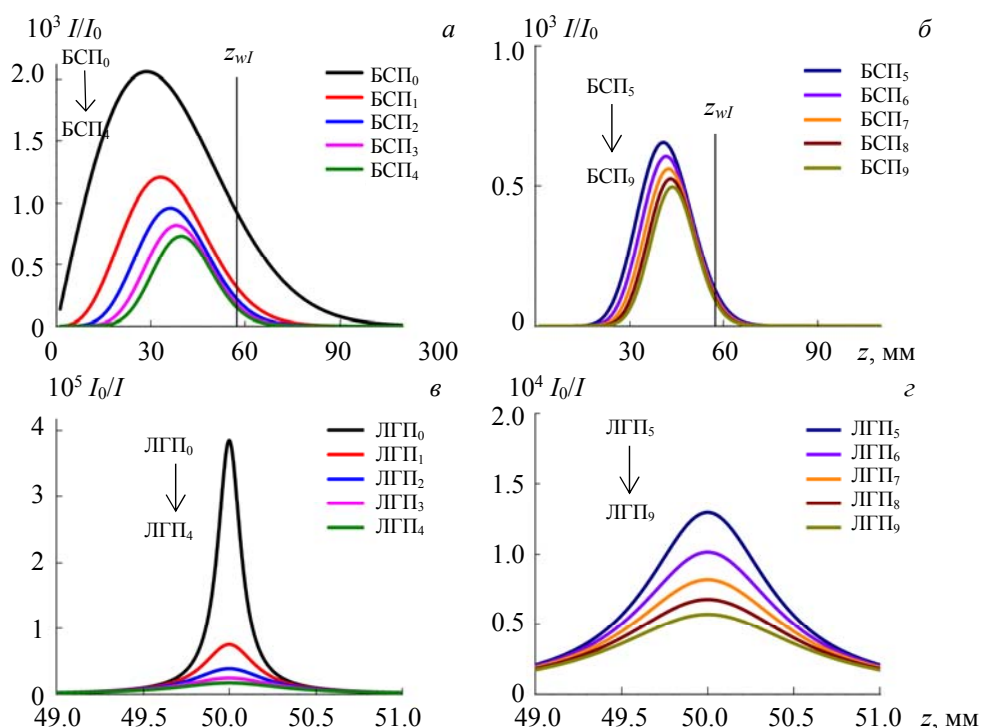


Рис. 3. Продольные распределения интенсивности в осевом/приосевом максимуме БСП, формируемого аксиконом с углом при основании 5° для n от 0 до 4 (а) и от 5 до 9 (б), и в лагерь-гауссовых пучках, сфокусированных линзой с фокусным расстоянием 50 мм, для $n = 0-4$ (в) и $5-9$ (з) при полуширине входного пучка по уровню интенсивности $e^{-2} w_I = 2500$ мкм

Для сверления отверстий в прозрачных средах [6, 7], точечного лазерного воздействия [8], для удержания микрочастиц [9—11], передачи энергии или информации на расстояние [12] преимущественно используются именно эти наиболее яркие максимумы интенсивности БСП. Но когда принципиальное значение имеет прежде всего коническая структура светового пучка, чрезмерная яркость осевого или приосевого максимума БСП может играть отрицательную роль, например, приводить к нежелательному разрушению твердотельного оптического элемента или критическому нарушению оптических свойств рабочей среды (оптический пробой газообразной или жидкой среды). Такая ситуация может иметь место, когда световые пучки, сформированные аксиконами, применяются для некоторых видов нелинейно-оптического преобразования [13], преобразования порядка винтовой дислокации волнового фронта в кристалле [14], а также для неразрушающей диагностики изделий цилиндрической или конической формы [15, 16]. Область пространства, в которой максимальная интенсивность в поперечном сечении БСП превышает I_0 , предлагается условно называть “опасной зоной” БСП. Уменьшение общей мощности БСП не является оптимальным решением проблемы, поскольку из-за этого снижаются выходная мощность устройства, эффективность процессов или точность измерений.

Для обеспечения целостности оптических элементов максимальную интенсивность I_0 исходного гауссова или лагерь-гауссова светового пучка целесообразно изначально выбирать или устанавливать ослабителями (аттенюаторами) не выше предела лучевой прочности используемых в оптической установке элементов и объектов. После этого во многих случаях целесообразно использовать БСП на тех расстояниях от аксикона, где максимальная интенсивность поля в поперечном сечении ниже I_0 и поэтому является безопасной для используемых оптических элементов.

Оптимальная “безопасная зона” БСП 0-, 1- и 2-го порядков. Начало “опасной зоны” БСП всех порядков находится в плоскости, проходящей через вершину идеального аксикона, так как в этой плоскости максимальная интенсивность БСП равна I_0 . Рассчитаны длины “опасных зон” z_K для БСП от 0- до 9-го порядка включительно, т. е. продольная координата, для которой интенсивность осевого максимума равна максимальной интенсивности падающего на аксикон гауссова светового пучка в плоскости аксикона. На рис. 4 представлено распределение интенсивности в поперечном сечении в конце “опасной зоны” БСП₀ и БСП₁.

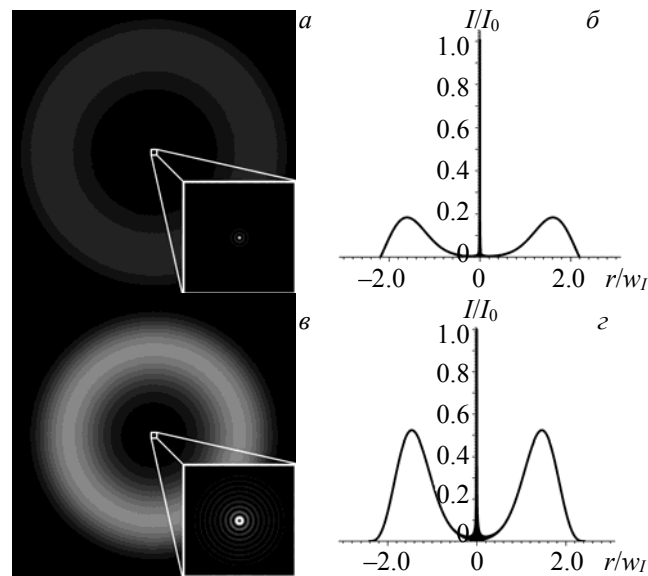


Рис. 4. Распределения интенсивности в конце “опасной зоны”: в плоскости поперечного сечения (а) и диаметральное (б) для БСП₀; в плоскости поперечного сечения (в) и диаметральное (г) для БСП₁; центральная часть рисунков а и в представлена в увеличенном виде

У бessel-гауссовых пучков всех порядков существует еще одно характерное поперечное сечение, для которого равны максимальные интенсивности в расходящемся кольцевом поле и в осевом/приосевом максимуме области, где распределение интенсивности описывается квадратом функции Бесселя (рис. 5). Продольная координата этого сечения обозначена как z_E . При $z = z_E$ энергия светового излучения наиболее равномерно распределена по поперечному сечению пучка, причем пиковые значения интенсивности не слишком сильно отличаются от предельно допустимого значения I_0 ($\sim 0.2I_0$ для БСП₀ и $\sim 0.5I_0$ для БСП₁). Из рис. 3 и 4 также видно, что БСП₁ переносит значительно больше энергии, чем БСП₀ при том же диаметре w_l исходного пучка, падающего на аксикон. Это связано с тем, что ЛГП₁ с максимальной интенсивностью I_0 , падающий на аксикон, содержит большую энергию, чем гауссов световой пучок с такой же максимальной интенсивностью.

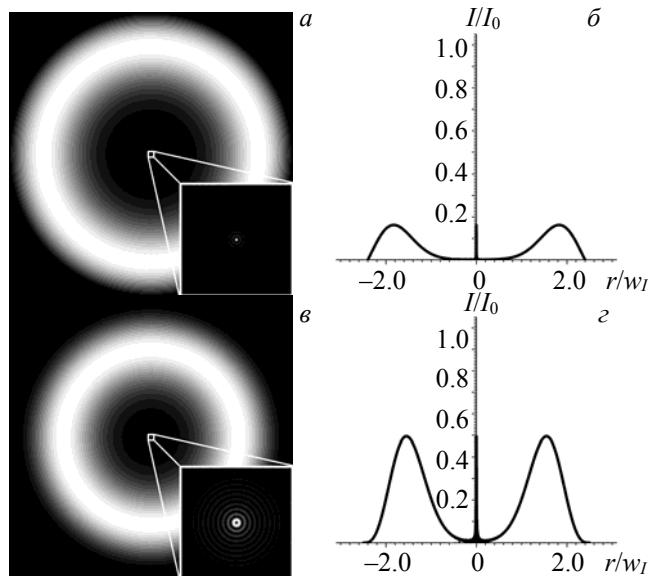


Рис. 5. Распределения интенсивности в месте равенства пиковых значений интенсивности расходящегося кольца и осевого/приосевого максимума: в плоскости поперечного сечения (а) и диаметральное (б) для БСП₀; в плоскости поперечного сечения (в) и диаметральное (г) для БСП₁; центральная часть рисунков а и в представлена в увеличенном виде

На рис. 6 показаны зависимости z_E и z_K , нормированных на длину зоны существования z_{wI} , от порядка пучка при различных полуширинах w_I . Можно определить примерные значения z_K при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо использовать коническую структуру БСП при максимально высокой общей мощности светового пучка без риска повреждения исследуемых образцов либо прочих особо чувствительных оптических элементов его осевым/приосевым максимумом интенсивности. При этом чувствительные материалы следует размещать на дистанциях от аксикона, больших, чем z_K . Из рис. 6 также видно, что для БСП₀, БСП₁ и БСП₂ и для диаметра исходного лазерного пучка $10000 \geq w_I \geq 625$ мкм выполняется неравенство $z_E > z_K$. Это означает, что выравнивание максимальных интенсивностей в кольце и приосевой части происходит тогда, когда оба значения меньше предельно допустимого I_0 . Поэтому для БСП₀, БСП₁ и БСП₂ зону между координатами z_K и z_E можно считать оптимальной “безопасной зоной”.

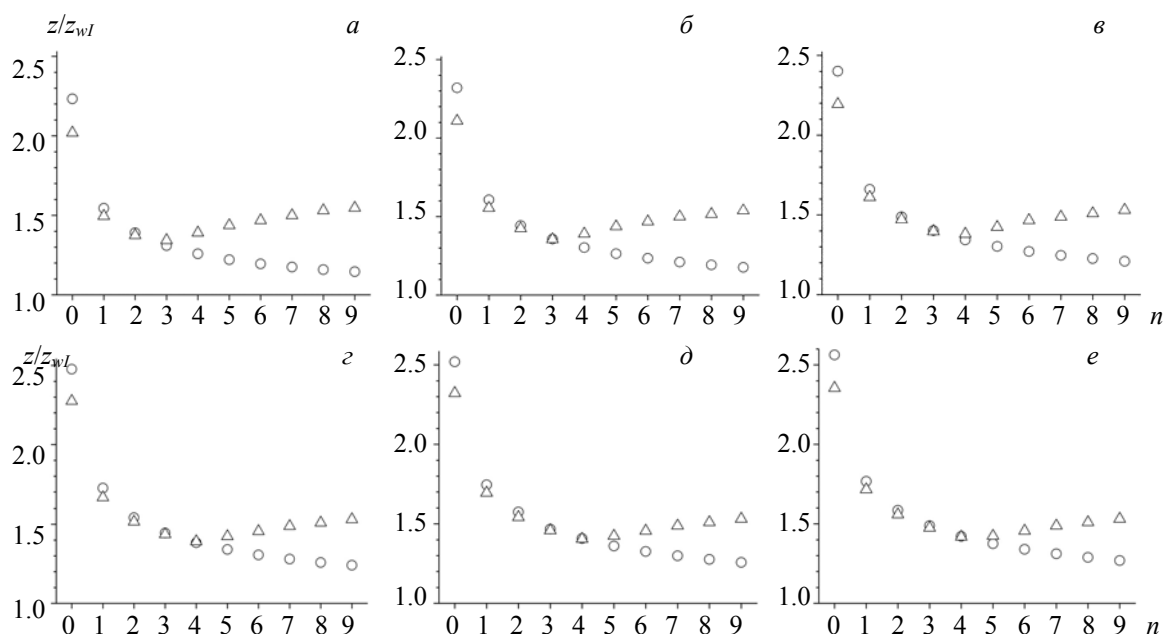


Рис. 6. Зависимости нормированных на длину зоны существования z_E (о) и z_K (Δ) от порядка пучка n при полуширинах $w_I = 625$ (а), 1250 (б), 2500 (в), 5000 (г), 7500 (д) и 10000 мкм (е)

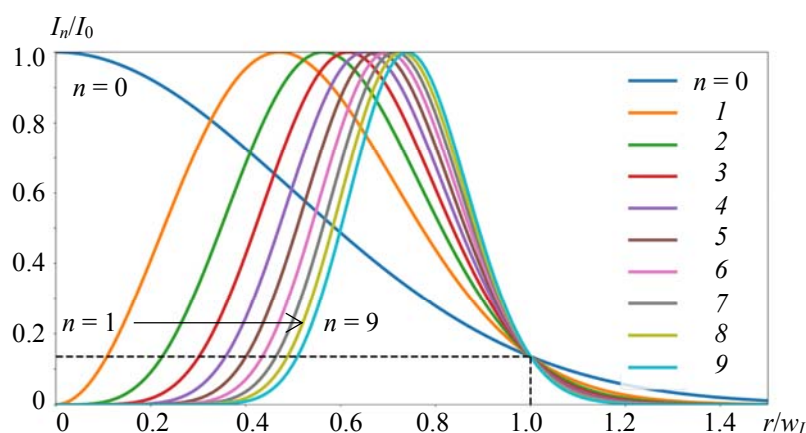


Рис. 7. Радиальные распределения интенсивности в лаггер-гауссовых пучках различных порядков, обладающих одинаковой максимальной интенсивностью и одинаковой полушириной w_I

Для сравнения мощностей, переносимых неограниченными и ограниченными радиусом w_l лаггерр-гауссовыми пучками, рассчитаны интегралы вида $\int f(r)rdr$ лаггерр-гауссовых функций, показанных на рис. 7, задаваемых формулой (1) с дополнительным условием одинакового w_l , в пределах от 0 до ∞ и от 0 до w_l . При этом для достижения равенства $I_n(r=w_l)/I_{\max} = 1/e^2$ для всех пучков необходим соответствующий подбор полуширин гауссовой огибающей w_n , которые можно получить из уравнения

$$(2e/n)^n (r/w_n)^{2n} \exp[-2(r/w_n)^2] = 1/e^2 \quad (3)$$

относительно w_n при $r = w_l$. Связь между w_l и w , удовлетворяющая уравнению (3), выражена в (1).

Таким образом, мощность задавалась формулой:

$$P_n = 2\pi \int_0^{r_{\max}} I_0 (2e/n)^n (r/w_n)^{2n} \exp[-2(r/w_n)^2] r dr, \quad (4)$$

где $r_{\max} = w_l$ в случае ограниченного и с $r_{\max} \rightarrow \infty$ в случае неограниченного пучков. Для непосредственного расчета мощности в случае неограниченного (P_n) и ограниченного (P_{nl}) лаггерр-гауссова пучков при фиксированном w_l использованы формулы (вывод см. Приложение В):

$$P_n = \frac{n!e^n}{-n^{n+1}W_{-1}(-e^{-1-2/n})} \pi w_l^2 I_0, \quad (5)$$

$$P_{nl} = \left[n! - \Gamma\left(n+1, -nW_{-1}(-e^{-1-2/n})\right) \right] \frac{e^n}{-n^{n+1}W_{-1}(-e^{-1-2/n})} \pi w_l^2 I_0, \quad (6)$$

где $\Gamma(a, z)$ — верхняя частичная гамма-функция. Мощность в случае неограниченного P_0 и ограниченного P_{0l} гауссова пучка:

$$P_0 = \frac{1}{2} \pi w_l^2 I_0, \quad (7)$$

$$P_{0l} = (1 - e^{-2}) \frac{1}{2} \pi w_l^2 I_0. \quad (8)$$

На рис. 8 представлены зависимость мощности P_{nl} , переносимой ограниченным лаггерр-гауссовым пучком n -го порядка, нормированной на мощность P_{0l} ограниченного гауссова пучка, от порядка n , и зависимость мощности P_n , переносимой неограниченным лаггерр-гауссовым пучком n -го порядка, нормированной на мощность P_0 неограниченного гауссова пучка, от порядка n . Видно, что наибольшая мощность при наличии ограничения по уровню I_0/e^2 содержится в проходящем через круглую апертуру диаметром $2w_l$ ЛГП₁. Она превышает мощность ограниченного по уровню I_{\max}/e^2 гауссова пучка в 1.31 раза. Мощность ограниченных лаггерр-гауссовых пучков более высоких порядков вплоть до $n = 10$ также превышает P_{0l} , однако для $n \geq 11$ переносимая мощность меньше P_{0l} . Это означает, что в зоне существования БСП_{*n*}, сформированных из лаггерр-гауссова пучка n -го порядка, вплоть до $n = 10$ в БСП_{*n*} сконцентрировано больше энергии, чем в зоне существования БСП₀. Однако в отсутствие ограничения по уровню I_0/e^2 мощность неограниченных лаггерр-гауссовых пучков n -го порядка

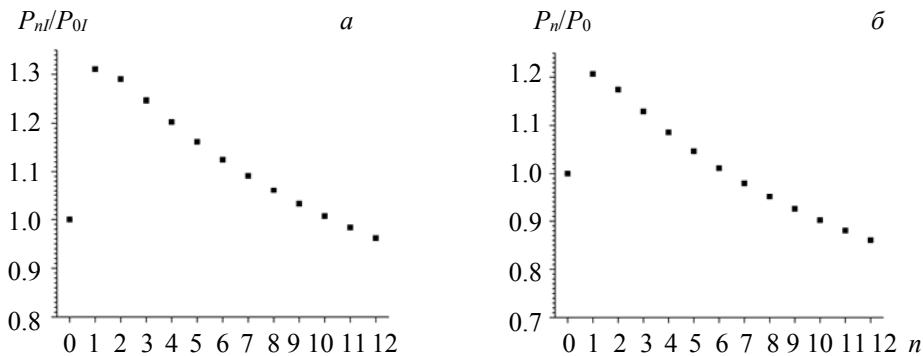


Рис. 8. Зависимость нормированной на мощность ограниченного P_{0l} и неограниченного P_0 гауссова пучка мощности ограниченного P_{nl} (а) и неограниченного P_n ЛГП_{*n*} от n

только до $n \leq 7$ превышает мощность P_0 неограниченного гауссова пучка с той же максимальной интенсивностью I_0 . Поскольку наибольшее количество энергии при фиксированном диаметре исходного пучка w_l и предельном I_0 может переносить лагерь-гауссов пучок 1-го порядка и немного меньше переносит лагерь-гауссов пучок 2-го порядка, то такими же свойствами обладают и сформированные из них соответственно БСП₁ и БСП₂. Отсюда следует, что при создании оптических систем, использующих коническую природу БСП, наиболее энергоэффективна система на основе БСП₁ и немного менее энергоэффективна на основе БСП₂. При этом такая система безопасна по уровню интенсивности для особо чувствительных материалов при их расположении в диапазоне продольной координаты между z_K и z_E .

Заключение. Предложенный подход к определению “опасной зоны” бесселевых световых пучков нулевого и высших порядков с использованием зоны их существования является универсальным для пучков любого порядка. Это позволяет выбирать гарантированно безопасную для чувствительных к высокоинтенсивному лазерному излучению материалов и оптических элементов область их расположения при проектировании оптических установок и систем. Полученные результаты перспективны для тех областей, в которых используется прежде всего коническая структура бесселевых световых пучков, а именно для нелинейно-оптического преобразования при коллинеарном взаимодействии направленных по конусу компонент бесселевых световых пучков, преобразования порядка винтовой дислокации волнового фронта небесселевых конических пучков в кристаллах, а также для профилометрии изделий цилиндрической или конической формы небесселевыми коническими световыми пучками. Особую практическую значимость имеют бесселевые световые пучки 1-го порядка, поскольку они способны переносить наиболее высокую энергию по сравнению с бесселевыми световыми пучками остальных порядков при равных максимальной интенсивности I_0 и поперечном размере по уровню I_0/e^2 исходного лагерь-гауссова светового пучка, из которого бесселев световой пучок 1-го порядка формируется с помощью аксикона.

Авторы выражают благодарность канд. физ.-мат. наук, доценту Н. А. Хило и д-ру физ.-мат. наук, профессору В. Н. Белому за конструктивное обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Работа выполнена в рамках задания 1.1 “Разработка методов и устройств диагностики материалов, процессов и изделий в оптическом и терагерцовом диапазонах спектра и их применение для оптической связи, микроскопии и определения характеристик различных объектов” (№ гос. регистрации 20210300) государственной программы научных исследований “Фотоника и электроника для инноваций” на 2021—2025 гг.

- [1] J. Durnin. J. Opt. Soc. Am. A, **4**, N 4 (1987) 651—654
- [2] F. Gori, G. Guattari, C. Padovani. Opt. Comm., **64**, N 6 (1987) 491—494
- [3] C. Paterson, R. Smith. Opt. Comm., **124** (1996) 121—130
- [4] H. S. Lee, B. W. Steward, K. Choi, H. Fenichel. Phys. Rev. A, **49**, N 6 (1994) 4922—4927
- [5] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth. Adv. Comp. Math., **5** (1996) 329—359
- [6] R. Stoian, G. Zhang, R. Meyer, F. Courvoisier. Adv. Opt. Technol., **7**, N 3 (2018) 165—174
- [7] M. K. Bhuyan, O. Jedrkiewicz, V. Sabonis, M. Mikutis, S. Recchia, A. Aprea, M. Bollani, P. Di Trapani. Appl. Phys. A, **120**, N 2 (2015) 443—446
- [8] M. Duocastella, C. B. Arnold. Laser & Photon. Rev., **6**, N 5 (2012) 607—621
- [9] J. Arlt, V. Garcez-Chavez, W. Sibbett, K. Dholakia. Opt. Comm., **197**, N 4–6 (2001) 239—245
- [10] G. S. Sokolovskii, S. N. Losev, K. K. Soboleva, V. V. Dudelev, A. G. Deryagin, W. Sibbett, V. I. Kuchinskii, E. U. Rafailov. Tech. Phys. Lett., **40**, N 6 (2014) 475—478
- [11] D. McGloin, V. Garcés-Chávez, K. Dholakia. Opt. Lett., **28**, N 8 (2003) 657—659
- [12] Н. А. Хило, П. И. Ропот, П. К. Петров, В. Н. Белый. Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, **58**, № 1 (2022) 90—100
- [13] П. А. Апанасевич, Р. В. Чулков, А. С. Грабчиков, В. А. Орлович, Г. И. Тимофеева. Квант. электрон., **39**, № 7 (2009) 615—623

- [14] А. А. Рыжович, С. В. Солоневич, Н. А. Хило, И. В. Балыкин. Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, № 1 (2016) 107—116
- [15] Н. А. Хило, П. И. Ропот, В. Н. Белый, Н. С. Казак, А. Г. Мащенко. Неразрушающий контроль и диагностика, № 1, спецвып. 1 (2015) 39—60
- [16] А. А. Рыжович, С. В. Солоневич, В. Е. Лепарский, А. Г. Смирнов. Неразрушающий контроль и диагностика, № 2, спецвып. 2 (2015) 34—66

Приложение А. Вывод формулы для определения w_l

Определить w_θ для заданного уровня интенсивности относительно максимальной θ можно следующим образом:

$$I_n(r = w_\theta(n)) / I_0 = \theta, \\ \left(\frac{2}{n}\right)^n e^n \left(\frac{w_\theta(n)}{w}\right)^{2n} \exp\left\{-2\left(\frac{w_\theta(n)}{w}\right)^2\right\} = \theta, \left(\frac{w_\theta(n)}{w}\right)^{2n} \exp\left\{-2\left(\frac{w_\theta(n)}{w}\right)^2\right\} = \theta \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-n},$$

обозначим $w_\theta(n) / w = t_\theta(n)$, $C_\theta(n) = \theta \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-n}$, $t_\theta^{2n}(n) \exp\{-2t_\theta^2(n)\} = C_\theta(n)$.

Полученное уравнение относительно t_θ является трансцендентным. Сведем его к выражению вида $ze^z = C$, чтобы получить решение в виде W -функции Ламберта $W(x)$ [5]:

$$t_\theta^2(n) \exp\left\{-\frac{2t_\theta^2(n)}{n}\right\} = C_\theta^{1/n}(n), \\ -\frac{2t_\theta^2(n)}{n} \exp\left\{-\frac{2t_\theta^2(n)}{n}\right\} = -\frac{2}{n} C_\theta^{1/n}(n).$$

Вводя обозначение $x = -2t^2/n$, получаем

$$x_\theta(n) \exp x_\theta(n) = -\frac{2}{n} C_\theta^{1/n}(n).$$

W -функция Ламберта $W(x)$ по определению является обратной функцией к $f(x) = xe^x$ [5]. Таким образом:

$$x_\theta(n) = W\left(-\frac{2}{n} C_\theta^{1/n}(n)\right).$$

Подставляя использованные ранее обозначения, получаем

$$w_\theta(n) = w \sqrt{-\frac{n}{2} W\left(-\frac{\theta^{1/n}}{e}\right)}.$$

В случае $\theta = e^{-k}$

$$w_{\exp(-k)}(n) = w \sqrt{-\frac{n}{2} W\left(-e^{-1-k/n}\right)}.$$

При $k = 2$, т. е. при оценке полуширины по уровню e^{-2}

$$w_{\exp(-2)}(n) = w \sqrt{-\frac{n}{2} W\left(-e^{-1-2/n}\right)}.$$

Для краткости обозначения полуширина по уровню e^{-2} записывается как $w_l(n) = w_{\exp(-2)}(n)$.

Следует отметить, что W -функция Ламберта является многозначной функцией комплексного аргумента. W -функция принимает действительные значения для действительного аргумента на нулевой $W_0(x)$ и минус первой ветвях $W_{-1}(x)$ [1], представленных на рис. S1. Областью определения функции на ветви $W_{-1}(x)$ является интервал $x \in [-1/e, 0)$. Таким образом, для любого k при имеющемся аргументе $-e^{1-k/n}$ найдутся два решения (на 0- и (-1) -ветвях). Решение на 0-ветви всегда меньше, чем на -1 , за исключением аргумента, равного $-1/e$. Меньшее решение соответствует “внутренней” границе

светового кольца распределения интенсивности, большее — “внешней” границе. Следовательно, в соответствии с введенным определением для w_I :

$$w_I(n) = w \sqrt{-\frac{n}{2} W_{-1}(-e^{-1-2/n})}.$$

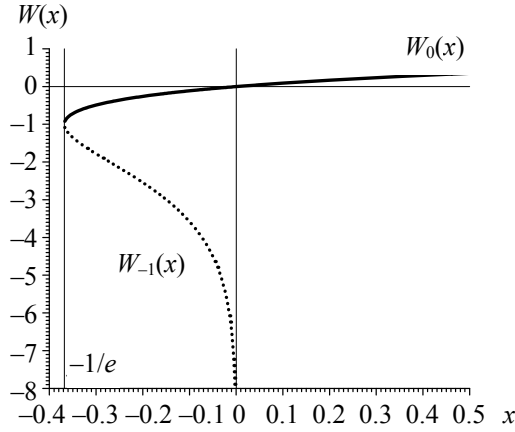


Рис. S1. Действительные ветви функции $W(x)$: сплошная линия — нулевая ветвь $W_0(x)$, пунктир — минус первая ветвь $W_{-1}(x)$ [5]

Приложение Б. Нормировочный множитель для радиального распределения интенсивности лаггерр-гауссова пучка

Рассмотрим функцию, описывающую радиальное распределение интенсивности лаггерр-гауссова пучка с точностью до множителя:

$$g(r) = (r/w_n)^{2n} \exp\left[-2(r/w_n)^2\right].$$

Получим оценку максимальной интенсивности в радиальном распределении интенсивности, задаваемом этой функцией. Обозначим максимальное значение интенсивности g_{\max} , соответствующую ему радиальную координату r_{\max} . Необходимое условие для определения r_{\max} :

$$\left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=r_{\max}} = 0,$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^{2n}}{w^{2n}} \exp\left[-2\frac{r^2}{w^2}\right] \right\} = 2 \frac{r^{2n-1}}{w^{2n}} \left(n - 2\frac{r^2}{w^2} \right) \exp\left[-2\frac{r^2}{w^2}\right],$$

откуда $r_{\max} = w\sqrt{n/2}$. Значение g_{\max} получаем подстановкой r_{\max} в исходное распределение интенсивности:

$$g_{\max} = (n/2e)^n.$$

Таким образом, умножив $g(r)$ на I_0 и разделив на I_{\max} , получим функцию, которая описывает радиальное распределение интенсивности с максимумом, равным I_0 :

$$I_n(r) = (I_0/I_{\max})g(r) = I_0 (2e/n)^n (r/w_n)^{2n} \exp\left[-2(r/w_n)^2\right].$$

Приложение В. Расчет мощности лаггер-гауссовых пучков

Определим полную мощность пучка:

$$P(n, w) = 2\pi \int_0^{\infty} r I_n(r) dr.$$

Опустив для упрощения нормировочный множитель $I_0(2e/n)^n$, получим распределение интенсивности:

$$A_n(r) = (r/w_n)^{2n} \exp\left[-2(r/w_n)^2\right].$$

В этом случае запишем полную мощность пучка:

$$\begin{aligned} W(n, w) &= 2\pi \int_0^{\infty} r A_n(r) dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{w^{2n}} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} dr = \frac{\pi}{(n+1)} \int_0^{\infty} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} d \frac{r^{2n+2}}{w^{2n}} = \\ &= \frac{\pi}{(n+1)} \left(\exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} d \frac{r^{2n+2}}{w^{2n}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{r^{2n+2}}{w^{2n}} d \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{r^{2n+3}}{w^{2n+2}} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} dr = \frac{2}{(n+1)} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{r^{2(n+1)+1}}{w^{2(n+1)}} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} d = \frac{2}{(n+1)} W(n+1, w). \end{aligned}$$

Таким образом

$$W(n+1, w) = \frac{n+1}{2} W(n, w),$$

отсюда

$$W(n, w) = \frac{n!}{2^n} W(0, w).$$

В свою очередь

$$W(0, w) = 2\pi \int_0^{\infty} r \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} dr = -\frac{\pi w^2}{4} \int_{r=0}^{r=\infty} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} d \left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} = \frac{\pi w^2}{2} \exp\left\{-2 \frac{r^2}{w^2}\right\} \Big|_{\infty}^0 = \frac{\pi w^2}{2}.$$

Значит

$$W(n, w) = \frac{n!}{2^{n+1}} \pi w^2.$$

В силу введенных определений:

$$I_n(r) = I_0 (2e/n)^n A_n(r).$$

Отсюда в силу линейности операции интегрирования:

$$P(n, w) = I_0 (2e/n)^n W(n, w).$$

Тогда

$$P(n, w) = \frac{n! e^n}{2n^{n+1}} \pi w^2 I_0.$$

Также w можно выразить через w_l , например для случая, когда сравниваются пучки с одинаковым w_l :

$$w = \frac{w_l}{\sqrt{-\frac{|n|}{2} W_{-1}(-e^{-1-2/|n|})}}.$$

Итоговая формула для мощности для лаггер-гауссова пучка при фиксированном w_l :

$$P_{w_l}(n, w_l) = \frac{n! e^n}{-n^{n+1} W_{-1}(-e^{-1-2/n})} \pi w_l^2 I_0,$$

для гауссова пучка

$$P_{wI}(0, w_I) = \frac{1}{2} \pi w_I^2 I_0.$$

Для краткости введено обозначение $P_n = P_{wI}(n, w_I)$.

Рассмотрим мощность, заключенную в кольце заданного радиуса R :

$$W_R(n, w) = 2\pi \int_0^R r A_n(r) dr = 2\pi \int_0^R r (r/w)^{2n} \exp\{-2(r/w)^2\} dr.$$

Вводя замену $t = 2(r/w)^2$, получаем

$$W_R(n, w) = 2\pi \frac{w^2}{2^{n+2}} \int_0^{2(R/w)^2} t^n \exp\{-t\} dt = \pi \frac{w^2}{2^{n+1}} \gamma(n+1, 2(R/w)^2),$$

где γ — нижняя неполная гамма-функция:

$$\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} \exp\{-t\} dt,$$

связанная с обычно употребляемой верхней неполной гамма-функцией $\Gamma(a, z)$ и гамма-функцией $\Gamma(a)$ выражением

$$\gamma(a, z) + \Gamma(a, z) = \Gamma(a).$$

Таким образом:

$$W_R(n, w) = \pi \frac{w^2}{2^{n+1}} (\Gamma(n+1) - \Gamma(n+1, 2(R/w)^2)) = \pi \frac{w^2}{2^{n+1}} (n! - \Gamma(n+1, 2(R/w)^2)),$$

отсюда

$$W_R(n, w) = W(n, w) - \Gamma(n+1, 2(R/w)^2) \pi \frac{w^2}{2^{n+1}}.$$

Вычитаемое в полученной формуле характеризует энергию, содержащуюся в отброшенном “хвосте” распределения интенсивности (строго говоря, в пространственной области за пределами выделенного на оси круга).

В силу линейности операции интегрирования, как и в описанном выше случае, запишем мощность ограниченного лаггер-гауссова пучка:

$$P_R(n, w) = I_0 (2e/n)^n W_R(n, w) = P(n, w) - \Gamma(n+1, 2(R/w)^2) \frac{e^n}{2n^n} \pi w_I^2 I_0.$$

Мощность пучка, заключенную в круге радиусом w_I , можно получить аналогично случаю неограниченного пучка, выражая w через w_I и подставляя $R = w_I$:

$$P_{RwI}(n, w_I) = P_{wI}(n, w_I) - \Gamma\left(n+1, -nW_{-1}\left(-e^{-1-2/|n|}\right)\right) \frac{e^n}{-n^{n+1}W_{-1}\left(-e^{-1-2/n}\right)} \pi w_I^2 I_0$$

или как

$$P_{RwI}(n, w_I) = \left[n! - \Gamma\left(n+1, -nW_{-1}\left(-e^{-1-2/|n|}\right)\right) \right] \frac{e^n}{-n^{n+1}W_{-1}\left(-e^{-1-2/n}\right)} \pi w_I^2 I_0.$$

Для краткости введено обозначение $P_{nI} = P_{RwI}(n, w_I)$.