ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Н. Н. Роговцов

УДК 517.937;535.36;537.86.029;537.87;621.371

*Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь; e-mail: rogovtsov@bntu.by*

(Поступила 7 июля 2023)

Выведены новые (линейное и нелинейное) интегро-функциональные уравнения, решениями которых является усеченная спектральная характеристика четырехточечной функции когерентности лазерного пучка излучения, распространяющегося в турбулентной среде. В линейное интегро-функциональное уравнение входит некоторая вспомогательная функция W, от которой само решение данного уравнения не зависит (оно инвариантно по отношению к выбору W). Впервые получены формально строгие и достаточно простые представления для четырехточечной функции когерентности и ее усеченных спектральных характеристик. При отыскании представлений для данных функций использовалось, в частности, свойство инвариантности решений дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для четырехточечной функции когерентности и нового линейного интегро-функционального уравнения по отношению к выбору функции W. Показано, что посредством специального выбора этой функции и параметров, определяющих положения точек "наблюдения" и поперечные сечения лазерного пучка, можно получить различные точные, асимптотические и полуаналитические представления для усеченных спектральных характеристик, интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности и самой этой функции. При этом под полуаналитическими понимаются представления, которые содержат информацию об искомых величинах частично в неявной форме, но одновременно позволяют находить их в аналитическом (или численном) виде посредством использования каких-либо (например, итерационных) конструктивных процедур. В частности, полуаналитическим представлением является полученная рекуррентная формула, с помощью которой можно эффективно находить аналитические выражения и численные значения для указанных выше функций на различных поперечных сечениях лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде.

Ключевые слова: *турбулентная среда, четырехточечная функция когерентности, усеченные спектральные характеристики, полуаналитические представления, пучок лазерного излучения, интегро-функциональные уравнения.*

New (linear and non-linear) integro-functional equations are derived. The solutions of these equations are truncated spectral characteristics of fourth-order mutual coherence function of a laser beam propagating in a turbulent medium. The linear integro-functional equation includes some function W on which the solution of this equation does not depend (that is, it is invariant under any choice of function W). Firstly, formally rigorous and fairly simple representations for the fourth-order mutual coherence function and its truncated spectral characteristics are obtained. In finding these and other representations for these functions, we used, in particular, the property of invariance of solutions of a second-order partial differential equation for fourth-order mutual coherence function and new linear integro-functional equation with respect to any choice of function W. It is shown that by means of a special choice of this function and the parameters that determine the positions of the observation points and the cross sections of the laser beam, it is possible to obtain various exact, asymptotic, and semi-analytical representations for the truncated spectral charac-

---

SEMI-ANALYTICAL REPRESENTATIONS OF FOURTH-ORDER MUTUAL COHERENCE FUNCTION FOR LASER BEAM IN TURBULENT MEDIUM
N. N. Rogovtsov (*Belarus National Technical University, Minsk, Belarus; e-mail: rogovtsov@bntu.by*)

teristics, integral characteristics of the fourth-order mutual coherence function, and this function itself. In addition, semi-analytical representations are understood as representations that contain information about unknown values in a partially implicit form, but at the same time allow them to be found in an analytical (or numerical) form through the use of any (for example, iterative) constructive procedures. In particular, a semi-analytical representation is the recursive formula obtained in the article. It can be used to effectively find analytical expressions or numerical values for the above-mentioned functions on various cross sections of a laser beam propagating in a turbulent medium.

Keywords: *turbulent medium, fourth-order mutual coherence function, truncated spectral characteristics, semi-analytical representations, laser beam, integro-functional equations.*

Введение. Уже более полувека различными методами исследуются процессы распространения волн (в частности, электромагнитных) в непрерывных случайных (турбулентных) средах. Первые важные результаты, относящиеся к теории распространения волн в таких средах, были изложены в работах [1, 2]. В частности, в [1, 2] развита статистическая теория турбулентности и сформулированы в рамках скалярного квазиоптического (параболического) приближения дифференциальные уравнения в частных производных для статистических моментов комплексных амплитуд волновых полей в случайно неоднородных средах. Однако до сих пор отсутствуют публикации, в которых была бы решена в полном объеме проблема отыскания строгих аналитических или полуаналитических решений соответствующих краевых задач (BVPs) для данных дифференциальных уравнений для случаев статистических моментов четвертого и более высоких порядков. Исследование процессов распространения волн в турбулентных средах в силу сложности решения таких BVPs проводилось в [1, 2] и иных публикациях посредством использования других подходов. К ним относятся, например, диаграммный метод [2, 3], метод интегрального уравнения [4], обобщенный принцип Гюйгенса-Френеля [5, 6], метод фазовых экранов [7, 8], численные алгоритмы [9, 10], метод функции Грина [11], метод интегралов по траекториям (путям) [12]. Дополнительные сведения о методах исследования распространения электромагнитного (оптического) излучения в стохастических (турбулентных) средах и об использовании его закономерностей для решения различных прикладных проблем приведены, в частности, в [13—24] (см. также ссылки в них).

В данной работе выведены новые (линейное и нелинейное) интегро-функциональные уравнения для четырехмерного образа Фурье для четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\ldots)$ для случая лазерного пучка излучения, распространяющегося в земной атмосфере. При этом линейное уравнение такого типа является обобщением интегро-функционального уравнения, полученного и использованного ранее в [23, 24] при получении точных выражений для интегральных характеристик функции $\Gamma_{22}(\ldots)$ и при отыскании асимптотических и приближенных аналитических представлений для самой этой функции. Как и в [23], при выводе искомых обобщенных интегро-функциональных уравнений использованы эвристические процедуры и преобразования (действия), положенные в основу метода редукции общих соотношений инвариантности (general invariance relations reduction method — GIRRM [25]). Этот общий метод предложен и развит в [25—30], а также использован для отыскания строгих, асимптотических и численных решений ряда проблем (в частности, многомерных) теории переноса излучения, математической физики и теории распространения лазерного излучения в земной атмосфере (см., например, [23—35] и ссылки в них).

На основе использования общих математических свойств (в частности, свойств инвариантности) краевой задачи (BVP), решением которой является функция $\Gamma_{22}(\ldots)$, и обобщенных интегро-функциональных уравнений показано, что можно получить формально строгое решение данной BVP и найти полуаналитические, асимптотические и достаточно точные приближенные аналитические представления для этой функции. Эти представления, например, можно использовать для нахождения таких важных величин, как индекс мерцаний и пространственная корреляционная функция интенсивностей.

Постановка задачи и вывод обобщенных интегро-функциональных уравнений. Рассмотрим замкнутое полупространство $[V]$, на границе S которого лежит плоскость OXY правой прямоугольной декартовой системы координат $OXYZ$. Пусть ось Z направлена внутрь этого полупространства $[V]$, заполненного случайно неоднородной средой, свойства которой идентичны свойствам “прозрачной” части турбулентной атмосферы Земли. Возьмем четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 на произвольной плоскости z = const (const $\geq$ 0), положения которых в системе $OXYZ$ задаются радиус-векторами $\mathbf{r}_1 = (\rho_{11}, \rho_{12}, z)$, $\mathbf{r}_2 = (\rho_{21}, \rho_{22}, z)$, $\mathbf{r}'_1 = (\rho'_{11}, \rho'_{12}, z)$, $\mathbf{r}'_2 = (\rho'_{21}, \rho'_{22}, z)$. Кроме того, используем двумерные векторы $\boldsymbol{\rho}_1 = (\rho_{11}, \rho_{12})$, $\boldsymbol{\rho}_2 = (\rho_{21}, \rho_{22})$, $\boldsymbol{\rho}'_1 = (\rho'_{11}, \rho'_{12})$, $\boldsymbol{\rho}'_2 = (\rho'_{21}, \rho'_{22})$. Предположим, что среда облучается пространственно ограниченным (финитным) монохроматическим линейно поляризованным пучком лазерного излучения, для которого проекции напряженности электрического поля на оси X, Y могут быть записаны в виде $\exp\{i(\omega t - kz)\}U(\rho;z)$. Здесь i — мнимая единица, $k = (2\pi/\lambda)$ — волновое число, λ — длина волны, t — время, ω — круговая частота, $U(\rho;z)$ — комплексная амплитуда, которая является случайной функцией и незначительно изменяется на расстояниях порядка длины волны. Пусть пучок лазерного излучения имеет конечную мощность, и отношение (λ/a) удовлетворяет неравенству $(\lambda/a) << 1$ (под a понимается точная верхняя грань множества длин хорд, соединяющих любые две точки границы любого поперечного сечения этого пучка, когда $z\in[0, L]$, где L — длина трассы распространения пучка лазерного излучения; a может зависеть от L). Допустим, что "центры" поперечных сечений лазерного пучка вдоль трассы находятся достаточно близко к оси Z и модуль комплексной амплитуды для любых $z\in[0, L]$ удовлетворяет оценке $|U(\rho;z)| = O(\exp\{-w_0|\rho|\})$ при $\rho\to+\infty$ (w_0 — некоторое положительное число, размерность которого обратна размерности длины). Предположим, что известна четырехточечная функция когерентности $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ [1, 2, 23, 24] на плоскости $z = 0$ (т. е. известна информация о когерентных свойствах исходного лазерного пучка). Данная функция формально определяется выражением

$$\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z) = \langle U(\boldsymbol{\rho}_1;z)U(\boldsymbol{\rho}_2;z)U^*(\boldsymbol{\rho}_1';z)U^*(\boldsymbol{\rho}_2';z)\rangle. \tag{1}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$ означает операцию усреднения по ансамблю реализаций; * есть символ операции комплексного сопряжения; $U(\boldsymbol{\rho}_1;z),U(\boldsymbol{\rho}_2;z),U(\boldsymbol{\rho}_1';z),U(\boldsymbol{\rho}_2';z)$ имеют смысл комплексных амплитуд волнового поля на плоскости $z = \text{const}$ в системе $OXYZ$ в точках M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно.

В работах [1, 2] получено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$. Для случая финитных пучков естественно искать решение этого уравнения в классе функций, имеющих непрерывные частные производные порядка $n(n \geq 2)$ по всем компонентам векторов ρ_1, ρ_2, ρ_1', ρ_2' и непрерывную частную производную по z в полупространстве $[V]$. Решение данного уравнения для функции $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ при $z = 0$ должно совпадать с функцией $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';0)$ (это первое краевое условие). В качестве второго краевого условия, как и в [24], возьмем асимптотическое соотношение $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z) = O(\exp\{-w_0(|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_1'|+|\rho_2'|)\}$, которое имеет место, когда хотя бы одна из величин $|\rho_1|$, $|\rho_2|$, $|\rho_1'|$, $|\rho_2'|$ стремится к $+\infty$ (для финитных пучков это условие выполняется автоматически). Будем считать, что решение BVP для указанного выше дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$, имеет единственное решение в указанном выше классе функций.

Как показано в [23], нахождение функции $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ можно свести к решению уравнения:

$$\left[\frac{ik}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\boldsymbol{\omega}_1}\cdot\nabla_{\mathbf{u}} + \nabla_{\boldsymbol{\omega}_1}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} + \nabla_{\boldsymbol{\omega}_2}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} - \nabla_{\boldsymbol{\omega}_2}\cdot\nabla_{\mathbf{u}} + \frac{ik^3}{16}F_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z)\right]\Gamma_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\nabla_{\boldsymbol{\omega}_1}$, $\nabla_{\boldsymbol{\omega}_2}$, $\nabla_{\mathbf{u}}$, $\nabla_{\mathbf{p}}$ — двумерные операторы Гамильтона; точка между этими операторами и другими величинами в (2) и далее имеет смысл реального или символического скалярного произведения:

$$\boldsymbol{\omega}_l = \boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_l',\ \ \boldsymbol{\tau}_l = \boldsymbol{\rho}_l + \boldsymbol{\rho}_l',\ \ l\in\{1,2\},\ \ \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2,$$
$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2;\ \ \Gamma_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z) = \Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z);$$
$$\boldsymbol{\rho}_1 = 2^{-1}(\boldsymbol{\omega}_1 + 2^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{p})),\ \ \boldsymbol{\rho}_2 = 2^{-1}(\boldsymbol{\omega}_2 + 2^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{u})),$$
$$\boldsymbol{\rho}_1' = 2^{-1}(2^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_1),\ \ \boldsymbol{\rho}_2' = 2^{-1}(2^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{u}) - \boldsymbol{\omega}_2). \tag{3}$$

Функция $F_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z)$ в (2) имеет вид [23]

$$F_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z) = 8\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ(\mathbf{q};z)\Big[1+\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}))\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)))-$$
$$-\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)))(\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}))+\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2))))\Big]dq_1dq_2. \tag{4}$$

В (4) функция $\Phi^\circ_\varepsilon(\mathbf{q}; z) = \text{const}\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}; z)$ имеет смысл спектральной плотности флуктуаций диэлектрической проницаемости ε воздуха, которая с учетом соотношения $n = \sqrt{\varepsilon}$ непосредственно связана с плотностью флуктуаций показателя преломления n (const есть положительное число, которое зависит от форм записи прямого и обратного преобразований Фурье). При этом верно равенство

$\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(\mathbf{q}; z) = \Phi^{\circ}_{\varepsilon}(-\mathbf{q}; z)$. Принимая во внимание второе краевое условие, которому удовлетворяет функция $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$, и соответствующее ему второе краевое условие для функции $\Gamma^{\times}_{22}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)$, с помощью двумерных преобразований Фурье по переменным $\mathbf{p} = (p_1,p_2)$, $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ из (2) можно получить соотношение [23]:

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left((\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left((\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)\right]\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)+ \tag{5}$$

$$+(32\pi)^{-1}k^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{u})\}F^{\times}_{22}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z)\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\gamma};z)\,du_1du_2=0;$$

$$\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\gamma};z)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})\}\Gamma^{\times}_{22}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)\,dp_1dp_2,\quad \boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2) \tag{6}$$

$$\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{u})\}\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\gamma};z)\,du_1du_2,\ \boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2)\,.$$

Для вывода искомых уравнений используем более общий вариант процедуры разбиения по сравнению с примененной в [23]. Разобьем функцию $F^{\times}_{22}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z)$ на такую сумму слагаемых:

$$F^{\times}_{22}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{u};z)=\kappa_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)+\kappa_2(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L); \tag{7}$$

$$\begin{cases}\kappa_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)=8\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(\mathbf{q};z)\chi_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{q};z;L)\,dq_1dq_2,\\ \kappa_2(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)=8\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q};z)\chi_2(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\mathbf{q};z;L)\,dq_1dq_2,\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\chi_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{q};z;L)=1+W(...)C(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q})-\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)))\cos\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2))\right),\\ \chi_2(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{q};z;L)=C(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q})\left(\cos\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})\right)-W(...)\right).\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $C(\omega_1,\omega_2;\mathbf{q}) = \cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\omega_1-\omega_2))) - \cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot(\omega_1+\omega_2)))$, под $W(\ldots)$ понимается некоторая безразмерная функция $W(\ldots) = W(\omega_1,\omega_2;\varsigma,\gamma,2^{-1}\mathbf{q};z;L)$, от выбора которой строгое решение сформулированной ранее BVP не зависит (т. е. оно инвариантно по отношению к любым изменениям вида функции $W(\ldots)$). Однако от выбора $W(\ldots)$ может зависеть форма решения этой BVP.

Подставляя в (5) вместо функции $F^{\times}_{22}(...)$ ее представление (7) и учитывая (6), (8), (9), получаем:

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left((\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left((\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)+\frac{k^3}{16}\kappa_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)\right]\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)+$$

$$+\frac{k^3}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{u})\}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(\mathbf{q};z)\left[C(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q})\left(\cos\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})\right)-W(...)\right)\right]dq_1dq_2\right]\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(...)\,du_1du_2=0, \tag{10}$$

где $\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(...)=\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\boldsymbol{\gamma};z)$. Принимая во внимание свойства симметрии косинуса, функции $\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(\mathbf{q}; z)$ и определения функций $\overline{\Gamma^{\times}_{22}}(...)$, $\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(...)$, можно посредством биективных замен переменных преобразовать соотношение (10) в интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left((\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left((\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)+\frac{k^3}{16}\kappa_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)\right]\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)+ \tag{11}$$

$$+2\pi k^3 g(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)=0,$$

$$g(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^{\circ}_{\varepsilon}(2(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q});z)C(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;2(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q}))\times \tag{12}$$

$$\times\left[\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q},\boldsymbol{\gamma};z)-W(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q};z;L)\overline{\overline{\Gamma^{\times}_{22}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)\right]dq_1dq_2.$$

Сделаем в (11) биективные замены переменных [23]:

$$\tilde{z} = 2k^{-1}z, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 + 2k^{-1}z(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 + 2k^{-1}z(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}). \tag{13}$$

С учетом (13) уравнение (11) примет форму:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{z}} + \frac{k^3}{16}\kappa_1\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}; L\right)\right]\times$$
$$\times\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}\right) + 2\pi k^3 g\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}; L\right) = 0. \tag{14}$$

Считая формально известной функцию $g(\ldots)$, принимая во внимание первое краевое условие и определение функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\ldots)$, с учетом единственности решения исходной BVP получаем из (14) искомое обобщенное линейное интегро-функциональное уравнение:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}\right) = \exp\left\{-f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; \tilde{z}; L\right)\right\}\times$$
$$\times\left[\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 0\right) - 2\pi k^3\int_0^{\tilde{z}}\exp\left\{f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; \tilde{z}'; L\right)\right\} g\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; \psi; L\right) d\tilde{z}'\right]; \tag{15}$$

$$f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; \tilde{z}; L\right) = (16)^{-1}k^3\int_0^{\tilde{z}}\kappa_1\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}''(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}''(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}''; L\right)d\tilde{z}'',$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}'(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}'(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}), \psi = 2^{-1}k\tilde{z}'. \tag{16}$$

Уравнение (15) при $W(\ldots) = \xi\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}))$, где $\xi \in (-\infty, +\infty)$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, совпадает с (13) из [23].

Функция $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\ldots)$ кроме линейного интегро-функционального уравнения (15) удовлетворяет также нелинейному уравнению такого типа. При выводе этого уравнения используем соотношение (10), единственность решения исходной BVP и его инвариантность по отношению к выбору $W(\ldots)$. Перепишем интегральный член в (10) в таком виде:

$$4^{-1}k^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ(\mathbf{q};z)C(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \mathbf{q})dq_1dq_2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{u})\right\}\times$$
$$\times\left(\cos\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})\right) - W\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}, 2^{-1}\mathbf{q}; z; L\right)\right)\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{u}; \boldsymbol{\gamma}; z\right)du_1du_2 = H. \tag{17}$$

Из (17) следует, что если в качестве $W(\ldots)$ взять функцию

$$W(\ldots) = \left(2\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right)\right)^{-1}\left[\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}+\frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\gamma}; z\right) + \overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}-\frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\gamma}; z\right)\right], \tag{18}$$

то интегральный член в (10) обратится тождественно в нуль. В силу существования решения исходной BVP для уравнения (2) функция $W(\ldots)$ в виде (18) также существует. Пусть $W(\ldots)$ выбрана в виде (18). Тогда с учетом свойств симметрии косинуса и функции $\Phi^\circ_\varepsilon(\mathbf{q}; z)$ равенство (10) с помощью элементарных преобразований можно привести к виду:

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \left((\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right) - \left((\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right) + k^3\kappa\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right)\right]\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right) = 0. \tag{19}$$

Коэффициент $\kappa(\ldots)$ в (19) определен равенством

$$\kappa(\ldots) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ(2\boldsymbol{\eta}; z)\left\{1 - \cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\right)\right)\cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)\right)\right) + T(\ldots; z)C\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; 2\boldsymbol{\eta}\right)\right\}d\eta_1 d\eta_2, \tag{20}$$

где $T(\ldots; z) = T\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right) = \left(\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right)\right)^{-1}\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}; z\right).$

Сделав в (19) замены (13), с учетом первого краевого условия получим искомое нелинейное интегро-функциональное уравнение:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}\right) = \exp\left\{-f_0(\ldots)\right\}\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 0\right), \tag{21}$$

$$f_0(\ldots) = f_0\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; \tilde{z}\right) = k^3\int_0^{\tilde{z}}\kappa\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 - \tilde{z}''(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}), \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 - \tilde{z}''(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}); \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\gamma}; 2^{-1}k\tilde{z}''\right)d\tilde{z}''.$$

Если левую и правую части (21) умножить на $(4\pi^2)^{-1}\exp\{-i((\mathbf{u}\cdot\varsigma) + (\mathbf{p}\cdot\gamma))\}$ и проинтегрировать по каждой из переменных ζ_1, ζ_2, γ_1, γ_2 в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то получится формально строгое представление для четырехточечной функции когерентности $\Gamma^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z\right)$. Отметим, что левые части уравнений (15), (21) равны $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)$ (это следует из (13)). Уравнение (21) дает формально строгое представление функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)$.

Процедуры отыскания вспомогательной функции *W*(…). Как показано выше, существует такая функция $W(\ldots)$, с помощью которой решение исходной BVP для уравнения (2) формально можно свести к решению BVP для уравнения (19). Для представления этой функции в явной форме необходима дополнительная информация. Для получения такой информации могут быть использованы формулы (10), (15), (21) и финитность лазерного пучка.

Пусть область $D(L)$ на OXY содержит все проекции всех точек, сопоставляемых концам радиус-векторов $\mathbf{u}$ и лежащих на плоскостях $z = \text{const} \in [0, L]$ (для финитного пучка эта область является ограниченной). Возьмем в (10) $W(\ldots)=W\left(2^{-1}\mathbf{q};L\right)=\left(n+1\right)^{-1}\sum\limits_{l=0}^{n}\xi_l\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}_l\right)\right)$, где для любых $l=\overline{0,n}$ величина ζ_l — некоторое число или функция от $\mathbf{q}$, α_l — двумерный вектор, задающий некоторую точку в $D(L)$. Тогда из равенства (10) следует, что минимизация интегрального члена в нем сводится к решению проблемы интерполяции $\cos(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}))$ для любых $\left|\mathbf{q}\right|\in\left[0,+\infty\right)$ по переменной $\mathbf{u}$ в $D(L)$ и минимизации значений интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)dq_1dq_2\iint\limits_{D(L)}\left|\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)-W\left(2^{-1}\mathbf{q};L\right)\right|du_1du_2\,. \tag{22}$$

Для случая спектра флуктуации Кармана [36] и достаточно узких лазерных пучков (т. е. верно неравенство $|\mathbf{q}|_{\max}a << 1$, где $|\mathbf{q}|_{\max}$ — такое значение $|\mathbf{q}|$, для которого можно пренебречь значением интеграла $\int\limits_{|\mathbf{q}|_{\max}}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\rho,z\right)\rho d\rho$ по сравнению с $\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\rho,z\right)\rho d\rho$) указанная выше проблема легко решается. Следует просто положить $\zeta_0 = 1$, $\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$, $n = 0$. При этом фактически считается, что $W(\ldots) \equiv 1$.

Минимизацию модуля интегрального члена в (10), записанного в форме (17), для случая финитных пучков можно провести посредством выбора $W(\ldots)$ в виде $W(\ldots) = 1 + W_1(2^{-1}\mathbf{q};\, L)$ и неравенства Коши—Буняковского. Имеет место оценка

$$\left|H\right|\le 2^{-1}kJ\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)\left[\iint\limits_{D(L)}\left(\left(\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)-1\right)-W_1\left(2^{-1}\mathbf{q};L\right)\right)^2du_1du_2\right]^{1/2}dq_1dq_2. \tag{23}$$

Величина $J=\left[\iint\limits_{D(L)}\left|\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};\mathbf{0};z\right)\right|^2du_1du_2\right]^{1/2}$ в (23) не зависит от функции $W_1(\ldots)$ и является ограниченной для любых $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ и $z\in[0, L]$. Минимальное значение $|H|$ принимает тогда, когда в качестве $W_1(2^{-1}\mathbf{q};\, z)$ берется выражение

$$W_1\left(2^{-1}\mathbf{q};L\right)=-\left(Sq\left(D(L)\right)\right)^{-1}\iint\limits_{D(L)}\left(1-\cos\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})\right)\right)du_1du_2\,, \tag{24}$$

где $Sq(D(L))$ — площадь области $D(L)$. Минимум двойного интеграла в (23) по области $D(L)$ для такой функции $W_1(2^{-1}\mathbf{q};\, L)$ равен

$$Q=\iint\limits_{D(L)}\left(1-\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)\right)^2du_1du_2-\left(Sq\left(D(L)\right)\right)^{-1}\left(\iint\limits_{D(L)}\left(1-\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)\right)du_1du_2\right)^2. \tag{25}$$

Из (23)—(25) следует, что для случая спектра флуктуаций Кармана верна асимптотическая оценка $|H| = O((|\mathbf{q}|_{\max}a)^3)$ при $(|\mathbf{q}|_{\max}a)\to 0$. Следовательно, для достаточно узких лазерных пучков можно получать практически точные полуаналитические представления для функций $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\ldots)$, $\Gamma_{22}^{\times}(\ldots)$. Отметим, что представление $W(\ldots) = 1 + W_1(2^{-1}\mathbf{q};\, L)$ является более общим и конструктивным по сравнению с представлением $W(\ldots) \equiv 1$, поскольку оно учитывает формы поперечных сечений финитных лазерных пучков на трассе длины L.

При использовании уравнения (21) для отыскания $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(...)$, $\Gamma_{22}^{\times}(...)$ в качестве исходной аппроксимации функции $T(\ldots;z)$ берем величину $T_0 = T(\omega_1,\omega_2;\zeta,\eta,\gamma;0)$, которую можно считать известной, так как по предположению $\Gamma_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};0)$ — заданная функция.

Алгоритм получения точных, полуаналитических и иных представлений. Для отыскания различных представлений для искомых функций $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(...)$, $\Gamma_{22}^{\times}(...)$ используем следующий алгоритм:

1) выбрать какой-либо вариант задания функций $W(\ldots)$, $W_1(\ldots)$;

2) решить в аналитической форме BVP для уравнения

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left((\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left((\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)+\frac{k^3}{16}\kappa_1(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)\right]\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)=0 \qquad (26)$$

с учетом (8), (9) и краевого условия $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0)$;

3) принять $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ за исходную аппроксимацию функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ для $z > 0$;

4.1) заменить в формуле (12) для $g(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;L)$ функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q},\boldsymbol{\gamma};z)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ функциями $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q},\boldsymbol{\gamma};z)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$, (при этом $W(\omega_1,\omega_2;\varsigma;\gamma;\varsigma-\mathbf{q};z;L)$ в (12) надо заменить ее явным выражением с учетом сделанного выбора функций $W(\ldots)$, $W_1(\ldots)$);

4.2) в формуле (20) сделать замены функций $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\gamma};z)$ на $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\gamma};z)$ или подставить вместо $T(\omega_1,\omega_2;\varsigma,\eta;\gamma;z)$ величину $T_0 = T(\omega_1,\omega_2;\varsigma,\eta,\gamma;0)$.

5.1) при использовании (15) для получения уточненного выражения $\overline{\overline{\Gamma_{22;1}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ для $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta});\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};2^{-1}k\tilde{z})$ необходимо в (15) подставить функцию $g(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\psi;L)$, найденную с помощью действий из п. 4.1;

5.2) при использовании (21) для отыскания исходного приближения $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ для функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ следует под $f_0(\ldots)$ в (21) понимать функцию, полученную на основе ее определения и замены в (20) величины $T(\omega_1,\omega_2;\varsigma,\eta;\gamma;z)$ на T_0;

5.3) для отыскания уточненных представлений $\overline{\overline{\Gamma_{22;1}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ на основе (21) следует под $f_0(\ldots)$ в уравнении (21) подразумевать функцию, найденную посредством действий из первой части п. 4.2 (при этом величина T_0 не используется);

6) с помощью операций (действий) инвариантного разбиения и выделения [25—30] полубесконечных частей $[V_l]$ ($l \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$) из $[V]$ и учета единственности решения BVP для (2) следует на основе (21) записать рекуррентную формулу, позволяющую проводить полуаналитические вычисления значений функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z)$ на плоскостях, параллельных OXY;

7) с учетом определений прямого и обратного преобразований Фурье, формул (3), (13), уравнений (15), (21) и пп. 1—6 найти полуаналитические аппроксимации функции $\Gamma_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)=$ $=\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z)$.

Простейший вариант предложенного алгоритма использован в [24] (где фактически считалось, что $W(\ldots) \equiv 1$). Метод решения BVP для уравнения (26) изложен в [23]. Решение этой BVP имеет вид:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1+\tilde{z}(\gamma+\zeta),\boldsymbol{\omega}_2+\tilde{z}(\gamma-\zeta);\zeta,\gamma;0\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\left(\frac{k^3}{16}\right)\int_0^{\tilde{z}}\kappa_1\left(\boldsymbol{\omega}_1+(\tilde{z}-\tilde{z}'')(\gamma+\zeta),\omega_2+(\tilde{z}-\tilde{z}'')(\gamma-\zeta);\zeta,\gamma;2^{-1}k\tilde{z}'';L\right)d\tilde{z}''\right\},\tag{27}$$

где $\tilde{z}=2k^{-1}z$. Если положить $W(\ldots)\equiv 1$, то (27) примет форму:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1+\tilde{z}(\gamma+\zeta),\boldsymbol{\omega}_2+\tilde{z}(\gamma-\zeta);\zeta,\gamma;0\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-2\pi k^3\int_0^{\tilde{z}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ\left(2\boldsymbol{\eta};2^{-1}k\tilde{z}''\right)\Lambda\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\eta},\zeta,\gamma,\tilde{z}-\tilde{z}''\right)d\eta_1 d\eta_2\right]d\tilde{z}''\right\}=\Upsilon_0(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\zeta,\gamma;z),\tag{28}$$

где $\Lambda(...)=\left(1-\cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+2(\tilde{z}-\tilde{z}'')\gamma\right)\right)\right)\right)\left(1+\cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2+2(\tilde{z}-\tilde{z}'')\zeta\right)\right)\right)\right)$.

Если в правой части (21) под коэффициентом κ(…) подразумевать выражение (20), в котором строгое отношение $T(\ldots;z)$ заменено на 1, то она совпадет с правой частью (28). Отметим, что $T(\ldots;z)\to 1$ при $|\boldsymbol{\eta}|\to 0$ для любых $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\zeta,\gamma;z$. В рамках такого простого выбора $W(\ldots)$ в [24] фактически получен ряд аппроксимационных представлений для $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(...),\Gamma_{22}^{\times}(...)$. Обобщениями данных представлений становятся соотношения, которые получаются заменой $T(\ldots;z)$ в (20) на $T_0=\left(\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;0)\right)^{-1}\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta-\boldsymbol{\eta},\gamma;0)$ и последующей подстановкой полученной аппроксимации коэффициента κ(…) в (21).

Пусть $W(\ldots)=W(2^{-1}\mathbf{q};L)=1+W_1(2^{-1}\mathbf{q};L)$, где $W_1(2^{-1}\mathbf{q};L)$ задается формулой (24). Тогда под исходной аппроксимацией $\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)$ функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)$ следует понимать:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22;0}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)=\Upsilon_0(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\zeta,\gamma;z)\times$$
$$\times\exp\left\{-2\pi k^3\int_0^{\tilde{z}}d\tilde{z}''\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ\left(2\boldsymbol{\eta};2^{-1}k\tilde{z}''\right)W_1(\boldsymbol{\eta};L)\beta\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\eta},\zeta,\gamma;\tilde{z}-\tilde{z}''\right)d\eta_1 d\eta_2\right\},\tag{29}$$

где $\beta(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\eta},\zeta,\gamma,\tilde{z}-\tilde{z}'')=\cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2+2(\tilde{z}-\tilde{z}'')\zeta\right)\right)\right)-\cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+2(\tilde{z}-\tilde{z}'')\gamma\right)\right)\right)$. Из (29) получаем, что исходная аппроксимация $\Gamma_{22;0}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)$ для функции $\Gamma_{22}^{\times}(...)$ в данном случае:

$$\Gamma_{22;0}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)=\left(4\pi^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-i\left((\mathbf{u}\cdot\zeta)+(\mathbf{p}\cdot\gamma)\right)\right\}\Upsilon_0(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\zeta,\gamma;z)\times$$
$$\times\exp\left\{-2\pi k^3\int_0^{\tilde{z}}d\tilde{z}''\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ\left(2\boldsymbol{\eta};2^{-1}k\tilde{z}''\right)W_1(\boldsymbol{\eta};L)\beta\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\eta},\zeta,\gamma;\tilde{z}-\tilde{z}''\right)d\eta_1 d\eta_2\right\}d\zeta_1 d\zeta_2 d\gamma_1 d\gamma_2.\tag{30}$$

Нелинейное интегро-функциональное уравнение (21) можно использовать для отыскания в полуаналитическом виде значений функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)$ (см. п. 6 описанного выше алгоритма). Разобьем отрезок $[0, L]$ на n частей узлами $0, z_1, \ldots, z_n$ ($0<z_1<\ldots<z_n$; $z_0=0$, $z_n=L$). При этом каждому узлу с номером l поставим в соответствие полупространство $[V_l]$, $l=\overline{1,n}$ ($[V_0]=[V]$). Для вычисления функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\zeta,\gamma;z)$ на границах S_l этих полупространств (задаются равенствами z_l = const в системе $OXYZ$) можно использовать рекуррентную формулу:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22;ap}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\zeta,\gamma;z_l)=\overline{\overline{\Gamma_{22;ap}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1+\Delta\tilde{z}_l(\gamma+\zeta),\boldsymbol{\omega}_2+\Delta\tilde{z}_l(\gamma-\zeta);\zeta,\gamma;z_{l-1}\right)\exp\left\{-2\pi k^3\int_{\tilde{z}_{l-1}}^{\tilde{z}_l}\kappa_*(...)d\tilde{z}''\right\},$$
$$\kappa_*(...)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\varepsilon^\circ\left(2\boldsymbol{\eta};2^{-1}k\tilde{z}''\right)\Big\{1-C_l^+C_l^-+\left(C_l^--C_l^+\right)\mathrm{T}\left(\boldsymbol{\omega}_1+(\tilde{z}_l-\tilde{z}'')(\gamma+\zeta),\boldsymbol{\omega}_2+\right.\tag{31}$$
$$\left.+(\tilde{z}_l-\tilde{z}'')(\gamma-\zeta);\zeta,\boldsymbol{\eta},\gamma;2^{-1}k\tilde{z}_{l-1}\right)\Big\}d\eta_1 d\eta_2,\ l=\overline{1,n}.$$

Здесь $C_l^+ = \cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+2\left(\tilde z_l-\tilde z''\right)\boldsymbol{\gamma}\right)\right)\right), C_l^- = \cos\left(\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2+2\left(\tilde z_l-\tilde z''\right)\boldsymbol{\zeta}\right)\right)\right)$; $\tilde z_l = 2k^{-1}z_l, \Delta\tilde z_l = \tilde z_l - \tilde z_{l-1}$; $\overline{\overline{\Gamma_{22;ap}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z_l\right)$— приближенное выражение для функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z_l\right)$ на плоскости z_l = const (если $l-1=0$, то $\overline{\overline{\Gamma_{22;ap}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z_{l-1}\right)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0\right)$ — известная функция, свойства которой определяются свойствами исходного лазерного пучка). Рекуррентная формула (31) позволяет однозначным образом находить все значения функций $\overline{\overline{\Gamma_{22;ap}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z_l\right)$ по известной функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0\right)$. Формула (31) может использоваться для нахождения (в принципе, с любой точностью) в полуаналитическом виде функций $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)$, $\Gamma_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z\right)$, описывающих статические свойства любых финитных лазерных пучков в турбулентной среде.

При некоторых ограничениях, наложенных на векторы $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2$, $\boldsymbol{\varsigma}$, $\boldsymbol{\gamma}$, уравнения (15), (21) имеют точные решения, причем для любого выбора функции $W(\ldots)$ в (15) и неизвестных значениях функции $T(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}; z)$ в (20). Эти точные решения несложно получить при выполнении любого из двух непротиворечивых условий [23]: $\boldsymbol{\varsigma} = -\boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{0} = (0,0)$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \mathbf{h} = (h_1,h_2)$ — произвольный вектор; $\boldsymbol{\varsigma} = \boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \mathbf{0} = (0,0)$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{b} = (b_1,b_2)$ — произвольный вектор. Если выполнено любое из этих условий, то функция $f_0(\ldots)$ в (21) не зависит от $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\ldots)$. Это означает, что функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{0},\mathbf{h};-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};z\right)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{b},\mathbf{0};\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};z\right)$ находятся в явной аналитической форме.

Заключение. На основе базовых идей и конструкций CIRRM [25] развит эффективный общий подход к решению проблемы нахождения четырехточечной функции когерентности и ее усеченных спектральных характеристик для случая финитных лазерных пучков, распространяющихся в турбулентной среде. С помощью этого подхода получены новые интегро-функциональные уравнения для функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\ldots)$ и формально строгие представления для данной функции и функции $\Gamma_{22}^{\times}(\ldots)$, а также найдены различные точные, полуаналитические и асимптотические представления для указанных выше функций. Предложен ряд процедур отыскания приближенных полуаналитических представлений для этих функций (эти представления в предельных ситуациях превращаются в точные соотношения). Впервые на основе выведенного уравнения (21) найдена рекуррентная формула (31), которую можно использовать как для получения различных полуаналитических представлений искомых функций для любых $z \in [0, L]$, так и для построения численных алгоритмов вычисления их значений. Полученные результаты в явной форме указывают на заметное влияние статистических свойств исходного лазерного пучка (наряду с воздействием самой турбулентной среды) на такие же свойства лазерного излучения вдоль трассы его распространения. Развитый подход можно применять при исследовании влияния типов финитных лазерных пучков [37—39] на процесс их распространения в турбулентной среде.

[1] **В. И. Шишов.** Изв. вузов. Радиофизика, **11**, № 6 (1968) 866—875

[2] **V. I. Tatarskii.** The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation, Springfield, VA, U.S. Department of Commerce (1971)

[3] **D. A. de Wolf.** IEEE Trans. Antennas Prop., **19** (1971) 254—262

[4] **W. P. Brown.** J. Opt. Soc. Am., **62** (1972) 45—54

[5] **A. Ishimaru.** Wave Propagation and Scattering in Random Media, New York, Academic Press (1978)

[6] **R. L. Fante.** J. Opt. Soc. Am., **71**, N 12 (1981) 1446—1451

[7] **C. L. Rino.** Radio Sci., **17** (1982) 855—867

[8] **B. J. Uscinski.** J. Opt. Soc. Am. A, **2**, N 12 (1985) 2077—2091

[9] **M. Tur.** J. Opt. Soc. Am. A, **2**, N 12 (1985) 2161—2170

[10] **V. S. Filinov.** Waves Random Media, **5**, N 3 (1995) 277—287

[11] **Z.-S. Wang.** Lett. Math. Phys., **13**, N 4 (1987) 261—271

[12] **S. Y. Lee, C. H. Liu, K. C. Yeh.** In: Research Topics in Electromagnetic Wave Theory, ch. 2, Ed. J. A. Kong, New York, Wiley (1981) 1—32

[13] **I. G. Yakushkin.** Radiophys. Quantum Electron., **21** (1978) 835—840
[14] **I. C. Andrews**, **R. L. Philipps.** Laser Beam Propagation Through Random Media, Bellingham, SPIE Press (2005)
[15] **A. Fannjiang, K. Solna.** Phys. Lett. A, **352** (2005) 22—29
[16] **J.-P. Fouque, J. Garnier, G. Papanicolaou, K. Solna.** Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered-Media, New York, Springer (2007)
[17] **Y. Mao, J. Gilles.** Inverse Problems and Imaging, **6** (2012) 531—546
[18] **Z. C. Chen, P. Li, J. Pu Ding, D. Zhao.** Appl. Phys. B, **107**, N 2 (2012) 469—472
[19] **V. A. Banakh, I. N. Smalikho.** Opt. Express, **22**, N 19 (2014) 1—13
[20] **А. В. Фалиц.** Опт. атм. океана, **28**, № 9 (2015) 763—771
[21] **И. П. Лукин.** Опт. атм. океана, **31**, № 9 (2018) 685—697
[22] **S. Silvestri, D. J. E. M. Roekaerts, R. Pecnik.** J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **233** (2019) 134—148
[23] **Н. Н. Роговцов, В. Я. Анисимов.** Журн. прикл. спектр., **87**, № 2 (2020) 204—211 [**N. N. Rogovtsov, V. Ya. Anissimov.** J. Appl. Spectr., **87**, № 2 (2020) 221—228]
[24] **Н. Н. Роговцов, В. Я. Анисимов.** Журн. прикл. спектр., **88**, № 6 (2021) 872—880 [**N. N. Rogovtsov, V. Ya. Anissimov.** J. Appl. Spectr., **88**, № 6 (2021) 1144—1151]
[25] **N. N. Rogovtsov.** In: Light Scattering Reviews, **5**, Ed. A. A. Kokhanovsky, Chichester, Springer-Praxis (2010) 243—327
[26] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **34** (1981) 241—246 [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **34**, N 2 (1981) 241—246]
[27] **Н. Н. Роговцов.** Докл. АН БССР, **25**, N 5 (1981) 420—423
[28] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **35**, № 6 (1981) 1354—1359 [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **35**, N 6 (1981) 1354—1359]
[29] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **43**, № 1 (1985) 813—816 [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **43**, N 1 (1985) 813—816]
[30] **Н. Н. Роговцов.** Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики, ч. 1, Минск, МО РБ, БГПА (1999)
[31] **Н. Н. Роговцов.** Дифференциальные уравнения, **26**, № 4 (1990) 600—607 [**N. N. Rogovtsov.** Differential Equations, **26**, N 4 (1990) 436—441]
[32] **Н. Н. Роговцов.** Дифференциальные уравнения, **44**, № 9 (2008) 1205—1221 [**N. N. Rogovtsov.** Differential Equations, **44**, N 9 (2008) 1—20]
[33] **Н. Н. Роговцов.** Дифференциальные уравнения, **51**, № 2 (2015) 263—276, 650—662 [**N. N. Rogovtsov.** Differential Equations, **51**, N 2 (2015) 268—281, 661—673]
[34] **N. N. Rogovtsov, F. Borovik.** J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **183** (2016) 128—153
[35] **N. N. Rogovtsov.** ASP Conf. Ser., **511** (2017) 276—281
[36] Распространение лазерного пучка в атмосфере: Проблемы прикладной физики, под ред. Д. Стробена, Москва, Мир (1981) 175—177
[37] **M. E. Gracheva, A. S. Gurvich, S. S. Kashkarov, V. V. Pokasov.** In: Laser Beam Propagation in the Atmosphere, Ed. J. W. Strohbehn, Berlin, Springer (1978) 107—127
[38] **S. N. Kurilkina, V. N. Belyi, N. S. Kazak.** Opt. Comm., **283** (2010) 3860—3868
[39] **Д. А. Маракасов, Д. С. Рычков.** Опт. атм. океана, **29**, № 4 (2016) 317—322