

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ НАНОЧАСТИЦЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВУХ РАДИАЦИОННЫХ СИЛ В ПОЛЕ СФОКУСИРОВАННОГО ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ГАУССОВОЙ ФОРМЫ

А. Ч. Свистун^{*}, Л. С. Гайда, Е. В. Матук

УДК 535.36;620.3

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22, Беларусь;
e-mail: laser777@gmail.com, svistun_ach@grsu.by; gls@grsu.by

(Поступила 13 ноября 2018)

Решено уравнение Ланжевена численными методами с нулевыми начальными условиями, которые описывают движение прозрачной сферической наночастицы под действием результирующей силы светового давления в поле непрерывного сфокусированного лазерного пучка гауссовой формы. Определены фокусное расстояние линзы, необходимое для локализации сферической наночастицы вблизи точки фокальной перетяжки пучка, и координаты, в которых компоненты радиационных сил принимают экстремальные значения, а также проанализирована их зависимость от фокусного расстояния линзы.

Ключевые слова: наночастица, радиационные силы, рассеяние света, гауссов пучок, фокусное расстояние.

The Langevin equation describing the motion of a transparent spherical nanoparticle under the influence of the resulting force of light pressure in a field of a continuous focused Gaussian laser beam is solved by numerical methods with zero initial conditions. The focal length of the lens, which is necessary for the localization of a spherical nanoparticle near the point of the beam focal waist, has been determined. The coordinates where the components of the radiation forces take extreme values are determined, and their dependence on the lens focal length is analyzed.

Keywords: nanoparticle, radiation forces, light scattering, Gaussian beam, focal length.

Введение. Мотивацией к исследованиям послужило описание действия сил, связанных с рассеянием и градиентами интенсивности света на микрочастицах, выполненное А. Эшкиным [1]. В процессе экспериментальных исследований А. Эшкин обнаружил необычный эффект: сфокусированный лазерный луч захватывал микрочастицы (10 нм—10 мкм), что позволяло удерживать и перемещать их в пространстве. В противовес давлению света притяжение микроскопических нейтральных частиц автор назвал “отрицательным давлением излучения” [2].

Наночастица (НЧ), расположенная вблизи фокусного расстояния лазерного луча, начинает двигаться в его направлении и, когда попадает в фокус, останавливается и находится неподвижно в трех пространственных измерениях, что приводит к эффекту оптической ловушки, в результате частицу можно управляемо перемещать. Данный эффект вызвал большой интерес, связанный со взаимодействием сил светового давления на микрочастицы и НЧ, и получил перспективное направление практического использования в современных медико-биологических технологиях (см., например, обзор [3]). Устройство для перемещения частиц и биологических объектов с помощью радиационных сил, созданное в [4, 5], в настоящее время широко используется при исследовании вирусов и бактерий [6], молекул ДНК [7], сортировки клеток по их собственным оптическим характеристикам [8], исследо-

LOCALIZATION OF DIELECTRIC SPHERICAL NANOPARTICLE UNDER THE ACTION OF RADIATION FORCES IN FIELD OF FOCUSED LASER GAUSSIAN BEAM

A. Ch. Svistun^{*}, L. S. Gaida, E. V. Matuk (Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ozheshko Str., Grodno, 230023, Belarus; e-mail: laser777@gmail.com; svistun_ach@grsu.by; gls@grsu.by)

вании движения хромосом [9], индуцированном синтезе клетки [10], микрооперациях в иммунологии и молекулярной генетике [11] и др. Управление транспортировкой НЧ в биологической ткани при воздействии на них лазерного излучения позволяет говорить о новых терапевтических направлениях в области медицины, таких как доставка лекарств внутрь клеток или обнаружение и уничтожение раковых опухолей на ранней стадии развития [12].

В области физики исследование светового давления также представляет большой интерес. Например, силы светового давления в интерференционном световом поле способствуют упорядочению расположения микрочастиц [13], что позволяет создавать гетерогенные среды на основе взвешенных в жидкости микрочастиц, обладающих интересными оптическими свойствами [14—16]. Данные среды могут иметь большой оптический коэффициент Керра и использоваться в качестве широкополосной нелинейной среды для лазерного излучения малой интенсивности и большой длительности [14, 17]. Простейший способ создания регулярных световых полей — интерференция двух световых пучков, приводящая к гармонической модуляции интенсивности лазерного излучения. Управление периодом модуляции интенсивности с помощью изменения угла схождения интерферирующих пучков позволяет варьировать воздействие силы светового давления на диэлектрическую частицу, тем самым перемещая ее в интерференционном поле. Благодаря этому эффекту существует возможность создания пространственных дифракционных решеток в виде упругих и эластичных полимерных пленок со взвешенными в них диэлектрическими НЧ и микрочастицами. Такие решетки обладают уникальными оптическими характеристиками, что позволяет использовать их в дальнейшем в разнообразных технологических целях в качестве фильтров и светоулучшающих покрытий.

Развитие современных нанотехнологий привело к созданию оптического (лазерного) пинцета, который может манипулировать микроскопическими объектами с помощью лазерного излучения. Он способен приложить к диэлектрическим НЧ различной формы силы от фемтоньютон до наноньютонов, а также измерять расстояния от нескольких нанометров до микрометров. В последнее время оптические пинцеты начали использоваться в области биофизики для изучения принципа работы и структуры белков [3].

Несмотря на большое количество работ по данной проблематике, воздействие радиационных сил на НЧ в зависимости от фокусировки лазерного луча, насколько нам известно, не достаточно рассмотрено. В данной работе определены условия, необходимые для локализации прозрачной сферической НЧ под действием двух компонент радиационных сил в поле сфокусированного гауссова лазерного пучка, а также зависимость координат, в которых компоненты радиационных сил принимают максимальные (минимальные) значения, от фокусного расстояния линзы с целью локализации и управления движением микроскопических объектов.

Основные соотношения. На прозрачную НЧ сферической формы в пространственно-неоднородном лазерном пучке действуют две компоненты радиационных сил: \mathbf{F}_{grad} — градиентная компонента, связанная с неоднородностью интенсивности излучения, \mathbf{F}_{sc} — компонента, обусловленная рассеянием излучения и действующая вдоль направления распространения пучка [18—21]. В случае, когда размеры частицы малы по сравнению с длиной волны излучения (приближение Рэлея [22]), силы \mathbf{F}_{sc} и \mathbf{F}_{grad} можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_{\text{sc}} = z8n/3\pi k^4 \alpha^2 I(x, y, z), \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_{\text{grad}} = zF_{\text{grad}z} + \mathbf{x}F_{\text{grad}x} + \mathbf{y}F_{\text{grad}y} = 2\pi n/c\alpha \nabla I(x, y, z), \quad (2)$$

где $I(x, y, z)$ — интенсивность пучка; $\alpha = R^3(\bar{m}^2 - 1)/(\bar{m}^2 + 2)$ — поляризуемость сферической НЧ радиусом R ($kR \ll 1$); $\bar{m} = n_0/n$; n_0 — показатель преломления НЧ; n — показатель преломления жидкости, в которой находятся НЧ; $k = 2\pi n/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны лазерного излучения; c — скорость света в вакууме; \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} — единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат; ∇ — оператор Гамильтона.

Интенсивность гауссова пучка, фокусируемого линзой с фокусным расстоянием f (см., например, [18, 23]):

$$I(x, y, z) = \frac{I_0}{(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 [(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2]} \right\}, \quad (3)$$

где $z_d = kr_0^2$ — дифракционная длина пучка; r_0 — радиус пучка.

При нахождении НЧ на оси пучка ($x = y = 0$) из (1)–(3) для силы рассеяния \mathbf{F}_{sc} и градиентной силы \mathbf{F}_{grad} , которая действует вдоль пучка, получено [18]:

$$\mathbf{F}_{sc} = \mathbf{z} \frac{8n}{3c} \pi k^4 \alpha^2 \frac{I_0}{(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{gradz} = \mathbf{z} 2\pi \frac{n}{c} \alpha \frac{I_0 \left\{ 2(1 - z/f)/f - 2z/z_d^2 \right\}}{\left[(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2 \right]^2} = \mathbf{z} 2\pi \frac{n}{c} \alpha \frac{2I_0 z_d^2 f^2 \left\{ z_d^2 (f - z) - f^2 z \right\}}{\left[z_d^2 (f - z)^2 + f^2 z^2 \right]^2}. \quad (5)$$

Следует отметить, что результирующая сила \mathbf{F}_z , которая действует на НЧ сферической формы, находящуюся на оси z пучка, определяется выражением:

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{F}_{sc} + \mathbf{F}_{gradz} = \mathbf{z} \frac{8n}{3c} \pi k^4 \alpha^2 \frac{I_0}{(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2} + \mathbf{z} 2\pi \frac{n}{c} \alpha \frac{I_0 \left\{ 2(1 - z/f)/f - 2z/z_d^2 \right\}}{\left[(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2 \right]^2}. \quad (6)$$

Уравнение Ланжевена для движения сферической НЧ под действием результирующей силы \mathbf{F}_z имеет вид:

$$m d^2 z / dt^2 + 6\pi\eta R dz / dt = dt, \quad (7)$$

где $m = 4\pi R^3 \rho / 3$ — масса сферической НЧ; ρ — плотность материала НЧ; η — динамический коэффициент вязкости жидкости.

Результаты и их обсуждение. Численное решение уравнения Ланжевена. Для сферической НЧ из латекса, которая находится в воде ($n_0 = 1.58$, $n = 1.33$), при $f = 0.05$ м, $r_0 = 10^{-3}$ м, $k = 1.571 \cdot 10^7$ м $^{-1}$, $R = 50$ нм, $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с, $I_0 = 51 \cdot 10^{10}$ Вт/м 2 получено решение уравнения (7) численными методами с нулевыми начальными условиями $z(t = 0) = 0$ и $dz/dt|_{t=0} = 0$ (оси координат помещены в начало движения и начальная скорость равна нулю), представленное на рис. 1. Как видно, при достижении сферической НЧ фокусного расстояния резко возрастает ее скорость. Это объясняется тем, что вблизи фокусного расстояния результирующая сила \mathbf{F}_z максимальна. Однако после прохождения фокуса линзы НЧ начинает резко терять скорость, так как уменьшается интенсивность расходящегося пучка и изменяется направление продольной компоненты градиентной силы. Также интересно наличие небольшого пика роста скорости, который соответствует моменту времени 2.738 с.

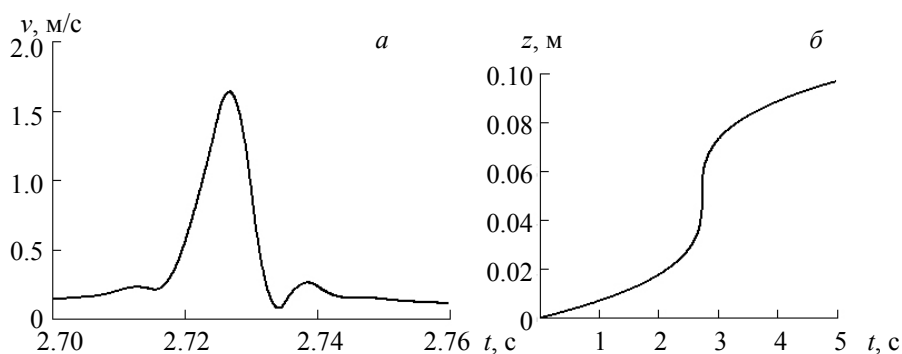


Рис. 1. Временные зависимости скорости (а) и координаты (б) наночастицы

Локализация наночастицы. Для локализации сферической НЧ необходимо, чтобы результирующая сила (б) равнялась нулю. Рассмотрим случай, когда сила рассеяния и градиентная сила сонаправлены. Определим точку локализации наносферы z_{lok} , которую можно найти из условия равенства результирующей силы нулю, т. е. $\mathbf{F}_z = 0$ или

$$\frac{8n}{3c} \pi k^4 \alpha^2 \frac{I_0}{(1 - z_{lok}/f)^2 + (z_{lok}/z_d)^2} + 2\pi \frac{n}{c} \alpha \frac{I_0 \left\{ 2(1 - z_{lok}/f)/f - 2z_{lok}/z_d^2 \right\}}{\left[(1 - z_{lok}/f)^2 + (z_{lok}/z_d)^2 \right]^2} = 0. \quad (8)$$

Решение квадратного уравнения (8) относительно $z_{\text{лок}}$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{\text{лок1}} = \frac{3f^2 + 3z_d^2 + 4\alpha f k^4 z_d^2 + \sqrt{9f^4 - 16\alpha^2 f^4 k^8 z_d^2 + 18f^2 z_d^2 + 9z_d^4}}{4\alpha k^4 (f^2 + z_d^2)}, \\ z_{\text{лок2}} = \frac{3f^2 + 3z_d^2 + 4\alpha f k^4 z_d^2 - \sqrt{9f^4 - 16\alpha^2 f^4 k^8 z_d^2 + 18f^2 z_d^2 + 9z_d^4}}{4\alpha k^4 (f^2 + z_d^2)}. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим случай, когда сила рассеяния и градиентная сила направлены противоположно друг другу. Определим точку локализации наносферы $z_{\text{лок}}$, которую можно найти из условия равенства результирующей силы нулю ($\mathbf{F}_z = 0$) или

$$\frac{8n}{3c} \pi k^4 \alpha^2 \frac{I_0}{(1 - z_{\text{лок}}/f)^2 + (z_{\text{лок}}/z_d)^2} - 2\pi \frac{n}{c} \alpha \frac{I_0 \{2(1 - z_{\text{лок}}/f)/f - 2z_{\text{лок}}/z_d^2\}}{[(1 - z_{\text{лок}}/f)^2 + (z_{\text{лок}}/z_d)^2]^2} = 0. \quad (10)$$

Решение квадратного уравнения (10) относительно $z_{\text{лок}}$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{\text{лок1}} = \frac{-3f^2 - 3z_d^2 + 4\alpha f k^4 z_d^2 + \sqrt{9f^4 - 16\alpha^2 f^4 k^8 z_d^2 + 18f^2 z_d^2 + 9z_d^4}}{4\alpha k^4 (f^2 + z_d^2)}, \\ z_{\text{лок2}} = \frac{-3f^2 - 3z_d^2 + 4\alpha f k^4 z_d^2 - \sqrt{9f^4 - 16\alpha^2 f^4 k^8 z_d^2 + 18f^2 z_d^2 + 9z_d^4}}{4\alpha k^4 (f^2 + z_d^2)}. \end{cases} \quad (11)$$

Следует отметить, что для существования корней $z_{\text{лок}}$ на множестве действительных чисел необходимо выполнение неравенства $9f^4 - 16\alpha^2 f^4 k^8 z_d^2 + 18f^2 z_d^2 + 9z_d^4 \geq 0$. Это возможно только при фокусном расстоянии линзы, которое удовлетворяет одному из условий:

$$f \leq \frac{\sqrt{3}z_d}{\sqrt{4\alpha k^4 z_d - 3}}, \quad f \leq \frac{\sqrt{3}z_d}{\sqrt{-4\alpha k^4 z_d - 3}}, \quad f \leq -\frac{\sqrt{3}z_d}{\sqrt{4\alpha k^4 z_d - 3}} \quad \text{или} \quad f \leq -\frac{\sqrt{3}z_d}{\sqrt{-4\alpha k^4 z_d - 3}}.$$

Нахождение экстремумов силы рассеяния и градиентной силы. На рис. 2 показаны зависимости сил F_{sc} и F_{gradz} от координаты z для НЧ радиусом $R = 30$ нм. Из рис. 2, а видно, что $F_{\text{sc}}(z)$ имеет вид симметричной кривой с максимумом $z_{\text{sc}}^{\text{max}} = f$. Зависимость продольной компоненты градиентной силы $F_{\text{gradz}}(z)$ имеет вид дисперсионной кривой (рис. 2, б) и достигает экстремумов в точках $z_{\text{grad}}^{\text{extr}}$. Видно, что функции силы рассеяния и градиентной силы непрерывны. Если точка $z_{\text{sc}}^{\text{max}}$ ($z_{\text{grad}}^{\text{extr}}$) является точкой экстремума функции $F_{\text{sc}}(z)$ ($F_{\text{gradz}}(z)$), то в ней производная либо равна нулю, либо не существует.

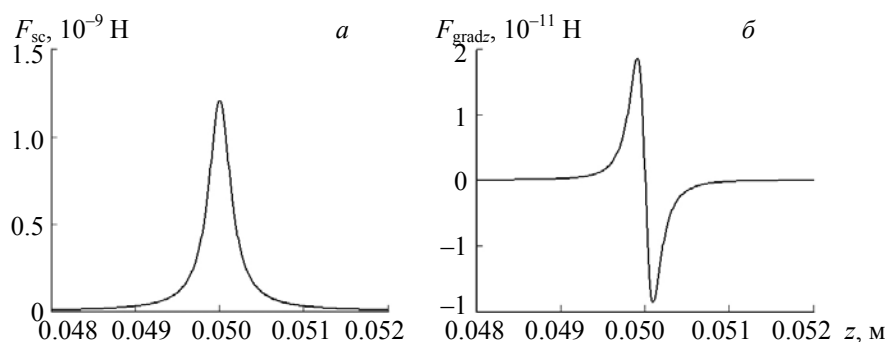


Рис. 2. Зависимости силы рассеяния F_{sc} (а) и продольной компоненты градиентной силы F_{gradz} (б) от z для наночастицы радиусом $R = 30$ нм

Рассмотрим силу рассеяния F_{sc} . Вычислим ее первую производную по координате и приравняем к нулю:

$$\frac{dF_{\text{sc}}}{dz} = \frac{8n}{3c} \pi k^4 \alpha^2 \frac{I_0 \{2(1 - z/f)/f - 2z/z_d^2\}}{[(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2]^2} = 0.$$

Отсюда следует

$$z_{sc}^{\max} = fz_d^2 / (z_d^2 + f^2). \quad (12)$$

На рис. 3 показана зависимость координаты z_{sc}^{\max} , в которой сила рассеяния максимальна, от фокусного расстояния f .

Оценки для сферической НЧ из латекса, которая находится в воде, при $f = 0.05$ м, $r_0 = 10^{-3}$ м, $k = 1.571 \cdot 10^7$ м⁻¹ дают $z_{sc}^{\max} = f = 0.05$ м (что хорошо согласуется с рис. 3). Таким образом, компонента силы рассеяния в точке фокуса $z_{sc}^{\max} = f$ достигает максимального значения вблизи оси z и составляет в соответствии с (4) $F_{sc}(z) = 1.26 \cdot 10^{-9}$ Н (см. рис. 2, а). Как видно из рис. 3, зависимость z_{sc}^{\max} от f при небольших фокусных расстояниях ($0 < f \leq 7.5$ м) носит линейный характер, однако в отсутствие фокусировки ($f \rightarrow \infty$) стремится к $z_{sc}^{\max}(f \rightarrow \infty) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{fz_d^2}{z_d^2 + f^2} = 0$.

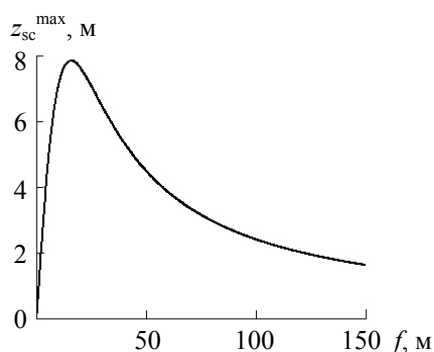


Рис. 3. Зависимость координаты z_{sc}^{\max} от фокусного расстояния f для силы рассеяния

Рассмотрим продольную компоненту градиентной силы F_{gradz} . Вычислим ее первую производную по координате и приравняем к нулю

$$\frac{dF_{gradz}(z)}{dz} = \frac{4\pi n \alpha I_0}{c} \frac{1}{[(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2]^2} \left[\frac{8\{(1 - z/f)/f - z/z_d^2\}^2}{(1 - z/f)^2 + (z/z_d)^2} - \frac{2}{f^2} - \frac{2}{z_d^2} \right] = 0.$$

Отсюда получаем

$$z_{grad}^{\max} = \frac{3fz_d^2 - \sqrt{3}f^2z_d}{3(f^2 + z_d^2)}, \quad z_{grad}^{\min} = \frac{3fz_d^2 + \sqrt{3}f^2z_d}{3(f^2 + z_d^2)}. \quad (13)$$

На рис. 4 показана зависимость координат z_{grad}^{\max} и z_{grad}^{\min} , в которых продольная компонента градиентной силы принимает максимальное (минимальное) значение, от фокусного расстояния f .

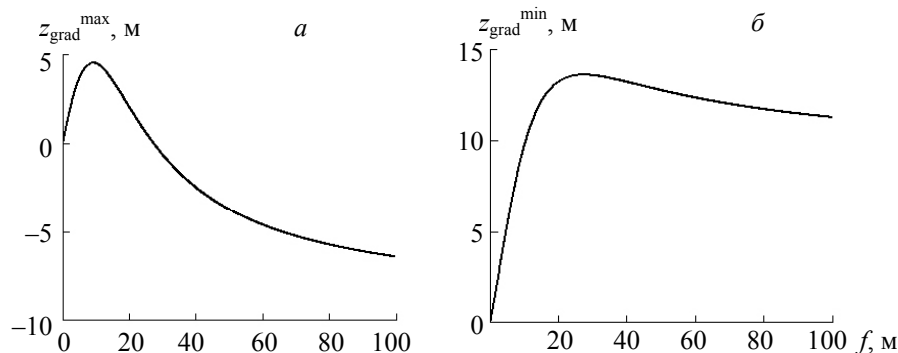


Рис. 4. Зависимости z_{grad}^{\max} (а) и z_{grad}^{\min} (б) от фокусного расстояния f для продольной компоненты градиентной силы

Для параметров, приведенных выше, продольная компонента градиентной силы достигает максимального и минимального значений в точках $z_{\text{grad}}^{\text{max}} = 0.0499076$ м и $z_{\text{grad}}^{\text{min}} = 0.0500914$ м, которые определяются неравенствами (13) и в соответствии с (5) $F_{\text{grad}z}^{\text{max}} = 1.863 \cdot 10^{-11}$ Н, $F_{\text{grad}z}^{\text{min}} = -1.863 \cdot 10^{-11}$ Н (см. рис. 2, б). Как видно из рис. 4, зависимость $z_{\text{grad}}^{\text{extr}}$ от f при небольших фокусных расстояниях носит линейный характер, однако с увеличением фокусного расстояния убывает и стремится к $z_{\text{grad}}^{\text{max}}(f \rightarrow \infty) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{3fz_d^2 - \sqrt{3}f^2z_d}{3(f^2 + z_d^2)} = -\frac{z_d}{\sqrt{3}}$, $z_{\text{grad}}^{\text{min}}(f \rightarrow \infty) = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{3fz_d^2 + \sqrt{3}f^2z_d}{3(f^2 + z_d^2)} = \frac{z_d}{\sqrt{3}}$ ($z_{\text{grad}}^{\text{max}}(f \rightarrow \infty) = -9.069$ м, $z_{\text{grad}}^{\text{min}}(f \rightarrow \infty) = 9.069$ м).

Заключение. На основе решения уравнения Ланжевена численными методами исследованы скорость и перемещение сферической наночастицы результирующей силой светового давления в поле сфокусированного гауссова лазерного пучка. Найдено фокусное расстояние линзы, которое необходимо для локализации наночастицы в поле сфокусированного лазерного пучка гауссовой формы. Определены координаты, в которых компонента силы рассеяния и продольная компонента градиентной силы принимают экстремальные значения, а также проанализирована их зависимость от фокусного расстояния линзы. Оценены такие координаты для случая отсутствия фокусировки лазерного излучения.

Авторы признательны А. А. Афанасьеву за обсуждение полученных результатов.

- [1] A. Ashkin. Phys. Rev. Lett., **24** (1970) 156—159
- [2] A. Ashkin. Biophys. J., **61** (1992) 569—582
- [3] Н. Г. Хлебцов. Квант. электрон., **38**, № 6 (2008) 504—529 [N. G. Khlebtsov. Quantum Electron., **38**, N 6 (2008) 504—529]
- [4] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, S. Chu. Opt. Lett., **11**, N 5 (1986) 288—290
- [5] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, T. Yamane. Nature, **330** (1987) 769—771
- [6] A. Ashkin, J. M. Dziedzic. Science, **235** (1987) 1517—1520
- [7] R. H. Austin, J. P. Brodg, E. C. Cox, T. Duke, W. Volkmuth. Phys. Today, **50** (1997) 32—38
- [8] M. P. Macdonald, G. C. Spalding, K. Dholakia. Nature, **426** (2003) 421—424
- [9] M. V. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, R. J. Walter. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **86** (1989) 7914—7918
- [10] R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, M. W. Berns. Cytometry, **12** (1991) 505—510
- [11] S. Seeger, S. Monajembashi, K. J. Hutter, K. J. Futterman, J. Wolfrum, K. O. Greulich. Cytometry, **12** (1991) 497—504
- [12] D. Lapotko, A. Shnip, E. Lukianova. J. Biomed. Opt., **10**, N 1 (2005) 1—12
- [13] А. А. Афанасьев, В. М. Катаркевич, А. Н. Рубинов, Т. Ш. Эфендиев. Журн. прикл. спектр., **69**, № 5 (2002) 675—679 [A. A. Afanas'ev, V. M. Katarkevich, A. N. Rubinov, T. Sh. Efendiev. J. Appl. Spectr., **69**, N 5 (2002) 782—787]
- [14] А. Н. Рубинов, В. М. Катаркевич, Т. Ш. Эфендиев. Журн. прикл. спектр., **70**, № 5 (2003) 663—666 [A. N. Rubinov, V. M. Katarkevich, T. Sh. Efendiev. J. Appl. Spectr., **70**, N 5 (2003) 753—757]
- [15] K. D. Wulf. Opt. Express, **14**, N 9 (2006) 4170—4175
- [16] P. W. Smith, A. Ashkin, W. J. Tomlinson. Opt. Lett., **6** (1981) 284—286
- [17] A. J. Palmer. Opt. Lett., **5** (1980) 54—55
- [18] А. А. Афанасьев, Л. С. Гайда, А. Ч. Свистун. Журн. прикл. спектр., **83**, № 6-16 (2016) 77—78
- [19] А. А. Афанасьев, Д. В. Новицкий. Квант. электрон., **47**, № 7 (2017) 651—654 [A. A. Afanas'ev, D. V. Novitskii. Quantum Electron., **47**, N 7 (2017) 651—654]
- [20] А. А. Афанасьев, Л. С. Гайда, Е. В. Матук, А. Ч. Свистун. Проблемы физ. мат. информ., **4** (29) (2016) 7—12 [A. A. Afanas'ev, L. S. Gaida, E. V. Matuk, A. C. Svistun. PFMT, **4** (29) (2016) 7—12]
- [21] Л. С. Гайда, Д. В. Гузатов, М. И. Игнатовский, А. Ч. Свистун. Вестн. ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2, № 1 (77) (2009) 121—127
- [22] Г. Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами, Москва, Иностран. лит. (1961) 104—144
- [23] С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. Физическая оптика, Москва, изд-во МГУ (1998) 476—480