ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОДЛОЖКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОГО ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НЕПРОЗРАЧНЫХ СРЕД

Т. Х. Салихов [1*], У. Мадвалиев [2], Д. М. Шарифов [3], Х. Ш. Туйчиев [4]

УДК 534.16;535.341;621.385

[1] Таджикский национальный университет,
734025, Душанбе, просп. Рудаки, 17, Таджикистан; e-mail: tsalikhov@mail.ru
[2] Физико-технический институт им. С. У. Умарова АН РТ, Душанбе, Таджикистан
[3] Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
[4] Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, Душанбе, Таджикистан

(Поступила 22 мая 2019)

Теоретически исследовано влияние тепловой нелинейности, обусловленной температурной зависимостью теплофизических параметров подложки, газового слоя и непрозрачного образца, а также ее степенью черноты, на характеристики нелинейного фотоакустического (ФА) сигнала на основной (ОГ) и второй (ВГ) гармониках при его газомикрофонной регистрации. Показано, что зависимость амплитуды ОГ от частоты $\sim\omega^{-1/2}$*, для ВГ* $\sim\omega^{-3/2}$*. Зависимость амплитуды ОГ от интенсивности падающего луча является нетривиальной и выражается посредством зависимости приращения температур облучаемой* Θ_0 *и тыловой* W_0 *сторон поверхности образца от* I_0*, в то время как эта же зависимость для ВГ* $\sim I_0^2$*.*

Ключевые слова: *фотоакустика, тепловая нелинейность, вторая гармоника.*

The effect of thermal nonlinearity (TN), on the characteristics of a nonlinear photoacoustic (PA) signal at the fundamental (FH) and second (SH) harmonics at its gas-microphone recording is investigated theoretically. The thermal nonlinearity is due to the temperature dependence of thermal parameters of the substrate, buffer gas and opaque sample as well as by the substrate emissivity. It is shown that the dependence of the amplitude of the FH on the frequency obeys the law $\sim\omega^{-1/2}$ *and for the SH the law is* $\sim\omega^{-3/2}$*. The dependence of the amplitude of the FH on the intensity of the incident beam is expressed by the dependence of the temperature increment of the irradiated* Θ_0 *and rear sides of the sample surface* W_0 *on* I_0*, while the same dependence for the SH is expressed by* $\sim I_0^2$*.*

Keywords: *photoacoustic, thermal nonlinearity, second harmonic.*

Введение. Общеизвестна достаточно высокая эффективность метода фотоакустической (ФА) спектроскопии для исследования оптических, теплофизических и акустических свойств конденсированных сред [1—4], включая порошкообразные, магнитоактивные, гиротропные и наносистемы (см., например, [5—9] и ссылки там). Этот успех связан прежде всего с предложенной в [10] одномерной линейной теорией данного явления, основанной на простом тепловом механизме генерации звука, обусловленной периодическим изменением теплового потока, поступающего из образца в газ — модель теплового акустического поршня. Вместе с тем при трансформации большого количества световой энергии в тепловую происходит существенное повышение температуры освещаемой области об-

---

EFFECT OF THERMAL NONLINEARITY OF THE SUBSTRATE ON THE CHARACTERISTICS OF A NONLINEAR PHOTOACOUSTIC SIGNAL OF OPAQUE MEDIA

T. Kh. Salikhov [1*], U. Madvaliev [2], D. M. Sharifov [3], H. Sh. Tuichiev [4] (*[1] Tajik National University, 17 Rudaki Prosp., Dushanbe, 734025, Tajikistan; e-mail: tsalikhov@mail.ru; [2] S. U. Umarov Physical-Technology Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan; [3] L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan; [4] S. Aini Tajik State Pedagogical University, Dushanbe, Tajikistan*)

разца, а из-за гауссовой формы пространственного распределения луча в образце формируется новое неоднородное термодинамическое состояние. В результате теплофизические и оптические параметры среды становятся зависящими от температуры, что принято называть тепловой нелинейностью (ТН) [1].

Различные аспекты влияния ТН теплофизических и оптических параметров образца на генерацию нелинейных составляющих тепловых волн теоретически достаточно подробно исследованы в [11—16]. В [17] методом газомикрофонной регистрации ФА сигнала впервые обнаружена вторая гармоника (ВГ), обусловленная ТН теплофизических параметров образца, в [18] этим методом исследовались частотные зависимости амплитуды первых двух гармоник этого сигнала, возбуждаемых металлическим образцом, а в [19] методом ФА микроскопии исследованы особенности генерации ВГ тепловых волн в разбавленном водном растворе чернильного красителя. Однако в [17—19] для описания результатов эксперимента принималась во внимание лишь ТН теплофизических величин образца.

Для непрозрачных образцов данный вопрос изучен в [20] для двухслойной одномерной модели ФА камеры, в которой вклад подложки не учитывается, и справедливо такое допущение лишь для низкотеплопроводящих образцов. Очевидно, что для случая, когда теплопроводность образца умеренная или высокая, результаты [20] не приемлемы.

Цель настоящей работы — обобщение результатов [20] и подробное теоретическое исследование вклада ТН подложки наряду с образцом и газовым слоем в формирование поля температуры и параметры первых двух гармоник генерируемого нелинейного ФА сигнала.

Теплофизическая модель задачи. Предположим, что на образец в ФА камере падает лазерный луч интенсивностью I_0, модулированный по гармоническому закону с частотой ω. Исходим из одномерной модели ФА камеры, состоящей из трех слоев — буферного газа (g), образца (s) и подложки (b). Буферный газ и подложку считаем прозрачными, образец — непрозрачным со степенью черноты $A(T)$. Тогда систему нелинейных уравнений теплопроводности для всех трех слоев можно записать в виде

$$C_{pg}(T_g)\frac{\partial T'_g}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_g(T_g)\frac{\partial T'_g}{\partial x}\right), \qquad 0\le x\le l_g, \tag{1}$$

$$C_{ps}(T_s)\frac{\partial T'_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_s(T_s)\frac{\partial T'_s}{\partial x}\right), \qquad -l\le x\le 0, \tag{2}$$

$$C_{pb}(T_b)\frac{\partial T'_b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_b(T_b)\frac{\partial T'_b}{\partial x}\right), \qquad -(l+l_b)\le x\le -l\,. \tag{3}$$

Здесь $C_{pi}(T)=\rho c_p$ и $\kappa_i(T)$ — теплоемкость единицы объема и коэффициент теплопроводности соответствующих слоев. Граничные условия — условия непрерывности температур и потоков тепла на границах газ—образец ($x=0$), образец—подложка ($x=-l$) и отсутствие нагрева на торцах ФА камеры:

$$T'_s(t,0)=T'_g(t,0)\,,\ T'_b(t,-l)=T'_s(t,-l)\,,\ T'_b(t,-l-l_b)=T'_g(t,l_g)=0\,, \tag{4}$$

$$\kappa_s(T_s)\frac{\partial T'_s}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\left[\kappa_g(T_g)\frac{\partial T'_g}{\partial x}+\frac{1}{2}I_0A(T_s)(1+e^{i\omega t})\right]\bigg|_{x=0},\ \kappa_s(T_s)\frac{\partial T'_s}{\partial x}\bigg|_{x=-l}=\kappa_b(T_b)\frac{\partial T'_b}{\partial x}\bigg|_{x=-l}. \tag{5}$$

Температурную зависимость величин $C_{pi}(T)$, $\kappa_i(T)$, всех слоев и $A=A(T)$ образца представим в виде $C_{pi}(T)=C_{pi}^{(0)}(1+\delta_iT'_i)$, $\kappa_i(T)=\kappa_i^{(0)}(1+\delta_{2i}T'_i)$, $A(T)=A^{(0)}(1+\delta_3T'_s)$, где $\delta_i=(1/C_{pi}^{(0)})(\partial C_{pi}/\partial T)$, $\delta_{2i}=(1/\kappa_{2i}^{(0)})(\partial\kappa_i/\partial T)$, $\delta_3=(1/A^{(0)})(\partial A/\partial T)$ — термические коэффициенты (ТК), $C_{pi}^{(0)}=C_{pi}(T_0)$, $\kappa_i^{(0)}=\kappa(T_0)$, $A^{(0)}=A(T_0)$ — начальные значения. Очевидно, что приращения температурных полей во всех слоях состоят из суммы локально равновесных $T'_{0i}(x)$ и колебательных частей $\Phi_i(t, x)$, т. е. $T'_i(t,x)=T'_{0i}(x)+\Phi_i(t,x)$, а величина $\Phi_i(t, x)$ — из суммы линейных и нелинейных составляющих: $\Phi_i(t,x)=\Phi_{Li}(t,x)+\Phi_{Ni}(t,x)$. Подставляя $C_{pi}(T)=C_{pi}^{(0)}(1+\delta_iT'_i)$, $\kappa_i(T)=\kappa_i^{(0)}(1+\delta_{2i}T'_i)$ и $\Phi_i(t,x)$ в (1)—(3), принимая во внимание условие $\left|\Phi_{N_i}(t,x)\right|<<\left|\Phi_{L_i}(t,x)\right|$ и пренебрегая величинами высших порядков малости, для нелинейной составляющей акустического колебания температуры $\Phi_{Ni}(t, x)$ получаем

$$\frac{\partial^2\Phi_{Ni}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{Ni}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(\delta_{2i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\delta_i}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)[2T_{0i}(x)\Phi_{Li}(t,x)+\Phi_{Li}^2(t,x)]\,, \tag{6}$$

где $i = g, s, b$. Величины Φ_{Li} определены в [10] и для рассматриваемого случая:

$$\Phi_{Lg}(\omega,x)=\Theta_L e^{-\sigma_g x}\,,\ \Phi_{Ls}(\omega,x)=U_L e^{\sigma_s x}+V_L e^{-\sigma_s x}\,,\ \Phi_{Lb}(\omega,x)=W_L e^{\sigma_b(x+l)}\,,$$

$$\Theta_L=\frac{I_0A^{(0)}}{2k_s^{(0)}\sigma_s}\frac{(b+1)e^{\sigma_s l}-(b-1)e^{-\sigma_s l}}{(g+1)(b+1)e^{\sigma_s l}-(b-1)(g-1)e^{-\sigma_s l}}\,,\ U_L=\frac{I_0A^{(0)}}{4k_s^{(0)}\sigma_s}+\frac{(1-g)\Theta_L}{2}\,,$$

$$V_L=\frac{(1+g)\Theta_L}{2}-\frac{I_0A^{(0)}}{4k_s^{(0)}\sigma_s}\quad,\ W_L=0.5\Theta_L[(1-g)e^{-\sigma_s l}+(1+g)e^{\sigma_s l}]+\frac{I_0A^{(0)}}{4\kappa_s^{(0)}\sigma_s}(e^{-\sigma_s l}-e^{\sigma_s l})\,,$$

$\sigma_i^2=i\omega/\chi_i^{(0)}$, $\sigma_i=(1+i)/\mu_i$, $g=\kappa_g^{(0)}a_g/\kappa_s^{(0)}a_s$, $a_i=\mu_i^{-1}$, $b=\kappa_b^{(0)}a_b/\kappa_s^{(0)}a_s$, $\mu_i=(2\chi_i/\omega)^{1/2}$ — длина тепловой диффузии, $\chi_i^{(0)}=\kappa_i^{(0)}/C_{pi}^{(0)}$ — начальная температуропроводность соответствующих слоев. Представим $\Phi_{Ni}(t, x)$ в (6) в виде суммы вкладов $\Phi_{Ni}(t,x)=\Phi_{1Ni}(t,x)+\Phi_{2Ni}(t,x)$, соответствующих первой и второй гармоникам. Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi_{1Ni}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{1Ni}}{\partial t}=-\left(\delta_{2i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\delta_i}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)[T_{0i}(x)\Phi_{Li}(t,x)]\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{2Ni}}{\partial x^2}-\frac{1}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial\Phi_{2Ni}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(\delta_{2i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\delta_i}{\chi_i^{(0)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)[\Phi_{Li}^2(t,x)]\,. \tag{8}$$

Это необходимые уравнения для описания нелинейного ФА отклика в рамках рассматриваемого приближения, а граничные условия для $\Phi_{1Ni}(t, x)$, следующие из (4) и (5):

$$\Phi_{1Ns}(t,0)=\Phi_{1Ng}(t,0)\,,\ \Phi_{1Nb}(t,-l)=\Phi_{1Ns}(t,-l)\,,\quad \Phi_{1Nb}(t,-l-l_b)=\Phi_{1Ng}(t,l_g)=0\,, \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial\Psi_{1g}(t,x)}{\partial x}+\frac{I_0A^{(0)}\delta_3}{2\kappa_g^{(0)}}(T_{0s}(x)e^{i\omega t}+\Phi_{Ls}(t,x))\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{1s}(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=0}\,,\ \frac{\partial\Psi_{1b}(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=-l}=\frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{1s}(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=-l}\,, \tag{10}$$

где $\Psi_{1i}(t,x)=\Phi_{1Ni}(t,x)+\delta_{2i}T_{0i}(x)\Phi_{Li}(t,x)$. Аналогичным образом можно записать граничные условия для $\Phi_{2Ni}(t, x)$ и $\Psi_{2i}(t,x)=\Phi_{2Ni}(t,x)+0.5\delta_{2i}\Phi_{Li}^2(t,x)$:

$$\Phi_{2Ns}(t,0)=\Phi_{2Ng}(t,0)\,,\ \Phi_{2Ns}(t,-l)=\Phi_{2Nb}(t,-l)\,,\quad \Phi_{2Nb}(t,-l-l_b)=\Phi_{2Ng}(t,l_g)=0\,, \tag{11}$$

$$\frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2s}(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial\Psi_{2g}(t,x)}{\partial x}+0.5(\kappa_g^{(0)})^{-1}A^{(0)}I_0\delta_3\Phi_{Ls}(t,x)e^{i\omega t}\,,\ \frac{\partial\Psi_{2b}(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=-l}=\frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}}\frac{\partial\Psi_{2s}(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=-l}\,. \tag{12}$$

Уравнения (7) и (8) совместно с граничными условиями (9)—(12) представляют собой теплофизическую модель сформулированной проблемы.

Стационарное температурное поле. Введем функции $g_i(x)=\delta_{2i}T_{0i}(x)$ и обозначения $T_{0s}(0)=T_{0g}(0)=\Theta_0$, $T_{0b}(-l)=T_{0s}(-l)=W_0$, $b_i=\delta_{2i}\Theta_0(2+\delta_{2i}\Theta_0)$. Тогда стационарное решение (1)—(3), удовлетворяющее граничным условиям (4), представим в виде

$$g_g(x)=[1+b_g(1-xl_g^{-1})]^{1/2}-1\,, \tag{13}$$

$$g_s(x)=[1+b_s(1+xl^{-1})]-\delta_{2s}W_0(2+\delta_{2s}W_0)xl^{-1}]^{1/2}-1\,, \tag{14}$$

$$g_b(x)=[1+\delta_{2b}W_0(2+\delta_{2b}W_0)(x+l+l_b)l_b^{-1}]^{1/2}-1\,. \tag{15}$$

Для нахождения Θ_0 и W_0, входящих в (13)—(15), из граничных условий (5) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\Theta_0^2(\delta_{2s}+d\delta_{2g})+2\Theta_0(1+d-d_1\delta_{3s})-W_0^2\delta_{2s}-2W_0-2d_1=0\,, \tag{16}$$

$$\Theta_0^2\delta_{2s}+2\Theta_0-W_0^2(\delta_{2s}+\delta_{2b}d_2)-2W_0(1+d_2)=0\,. \tag{17}$$

Здесь $d=l\kappa_g^{(0)}/l_g\kappa_s^{(0)}$, $d_1=lI_0A^{(0)}/2\kappa_s^{(0)}$, $d_2=l\kappa_b^{(0)}/l_b\kappa_s^{(0)}$.

Очевидно, при определении температурного поля в ФА камере в каждом конкретном случае необходимо численное решение системы (16), (17). Кроме того, учет подложки приводит к тому, что с ростом ее теплопроводности существенно уменьшаются Θ_0 и W_0.

Основная гармоника. Исходя из уравнения (7) для акустических колебаний температур, соответствующего основной гармонике (ОГ), и принимая $\Phi_L(t,x) = \Phi_L(\omega,x)\exp(i\omega t)$, полагаем $\Phi_{1Ni}(t, x) = \Phi_{1Ni}(\omega,x)\exp(i\omega t)$ и для функции $\Psi_{1i}(\omega,x) = \Phi_{1Ni}(\omega,x) + \delta_{2i}T'_{0i}(x)\Phi_{Li}(\omega,x)$ получаем выражения:

$$\frac{d^2\Psi_{1g}}{dx^2} - \sigma_g^2\Psi_{1g} = \sigma_g^2(\delta_g - \delta_{2g})T'_{0g}(x)\Phi_{Lg}(\omega,x), \quad (18)$$

$$\frac{d^2\Psi_{1s}}{dx^2} - \sigma_s^2\Psi_{1s} = \sigma_s^2(\delta_s - \delta_{2s})T'_{0s}(x)\Phi_{Ls}(\omega,x), \quad (19)$$

$$\frac{d^2\Psi_{1b}}{dx^2} - \sigma_b^2\Psi_{1b} = \sigma_b^2(\delta_b - \delta_{2b})T'_{0b}(x)\Phi_{Lb}(\omega,x), \quad (20)$$

решения которых можно записать в виде

$$\Psi_{1g}(\omega,x) = \Theta_{1N}e^{-\sigma_g x} + R_{1g}S_{1g}(x)e^{\sigma_g x} - R_{1g}S_{2g}(x)e^{-\sigma_g x}, \quad (21)$$

$$\Psi_{1s}(\omega,x) = U_{1N}e^{\sigma_s x} + V_{1N}e^{-\sigma_s x} + R_{1s}S_{1s}(x)e^{\sigma_s x} - R_{1s}S_{2s}(x)e^{-x\sigma_s}, \quad (22)$$

$$\Psi_{1b}(\omega,x) = W_{1N}e^{\sigma_b(x+l)} + R_{1b}S_{1b}(x)e^{\sigma_b(x+l)} - R_{1b}S_{2b}(x)e^{-(x+l)\sigma_b}. \quad (23)$$

Здесь $R_i = 0.5\delta_{2i}^{-1}\sigma_i(\delta_i - \delta_{2i})$,

$$S_{1g}(x) = \int g_{0g}(x)\Phi_{Lg}(\omega,x)e^{-\sigma_g x}dx,\ S_{2g}(x) = \int g_{0g}(x)\Phi_{Lg}(\omega,x)e^{\sigma_{gi} x}dx, \quad (24)$$

$$S_{1s}(x) = \int g_{0s}(x)\Phi_{Ls}(\omega,x)e^{-\sigma_{si} x}dx,\ S_{2s}(x) = \int g_{0s}(x)\Phi_{Ls}(\omega,x)e^{\sigma_{si} x}dx, \quad (25)$$

$$S_{1b}(x) = \int g_{0b}(x)\Phi_{Lb}(\omega,x)e^{-\sigma_b(x+l)}dx,\ S_{2b}(x) = \int g_{0b}(x)\Phi_{Lb}(\omega,x)e^{\sigma_b(x+l)}dx. \quad (26)$$

С использованием граничных условий (9), (10) находим систему уравнений для определения Θ_{1N}, U_{1N}, V_{1N} и W_{1N}, затем, исключая U_{1N}, V_{1N}, W_{1N} и учитывая $g << 1$, для Θ_{1N} получаем:

$$\Theta_{1N}(\omega,x) = \{\Theta_L[g_{0g}(0) - g_{0s}(0)] + R_{1g}[S_{2g}(0) - S_{1g}(0)]\} + \frac{A^{(0)}I_0\delta_3(\Theta_0 + \Theta_L)Z}{2\kappa_s^{(0)}\sigma_s\Delta} + \frac{2R_{1s}}{\Delta}\times$$
$$\times[(b-1)S_{1s}(0)e^{-\sigma_s l} - (b+1)S_{2s}(0)e^{\sigma_s l}] + \frac{2R_{1s}}{\Delta}[(b+1)S_{2s}(-l)e^{\sigma_s l} - (b-1)S_{1s}(-l)e^{-\sigma_s l}] + \quad (27)$$
$$+\frac{2b}{\Delta}[g_{0s}(-l)\Phi_{LS}(\omega,-l) - g_{0b}(-l)W_L - 2R_{1b}S_{2b}(-l)],$$

где $\Delta = (b-1)e^{-\sigma_s l} + (b+1)e^{\sigma_s l}$, $Z = (b+1)e^{\sigma_s l} - (b-1)e^{-\sigma_s l}$. С учетом справедливости (27) для произвольного значения $\sigma_s l$ для акустического колебания температуры находим

$$\Phi_{1Ng}(\omega,x) = [\Theta_{1N} - R_{1g}S_{2g}(x) - \Theta_L g_{0g}(x)]\exp(-\sigma_g x) + R_{1g}S_{1g}(x)\exp(\sigma_g x). \quad (28)$$

Из (27) и (28) видно, что для последующих вычислений $\Theta_{1N}(\omega, x)$ и $\Phi_{1Ng}(\omega, x)$ необходимо знать явный вид функций $S_{1i}(x)$ и $S_{2i}(x)$ для всех слоев в ФА камере. Подставим функцию $\Phi_{Li}(\omega, x)$ в выражения (24)—(26) и выполним интегрирование согласно процедуре [21]:

$$S_{1g}(x) \approx \frac{\Theta_L}{2\sigma_g}\left[1 - \sqrt{B_g} + \frac{b_g}{2l_g\sqrt{B_g}}(x + \frac{1}{2\sigma_g})\right]e^{-2\sigma_g x},\ S_{2g}(x) = -\left[\frac{2l_g}{3b_g}B_g^{3/2}\left[\sqrt{(1-\frac{b_g x}{B_g l})^3} - 1\right] + x\right]\Theta_L, \quad (29)$$

$$S_{1s}(x) \approx U_L\left\{\frac{2l}{3(b_s - b_{sb})}B_s^{3/2}\left[\sqrt{(1+\frac{(b_s - b_{sb})x}{B_s l})^3} - 1\right] - x\right\} + \frac{V_L}{2\sigma_s}(1 - B_s^{1/2})\exp(-2\sigma_s x), \quad (30)$$

$$S_{2s}(x) \approx V_L\left\{\frac{2l}{3(b_s - b_{sb})}B_s^{3/2}\left[\sqrt{(1+\frac{(b_s - b_{sb})x}{B_s l})^3} - 1\right] - x\right\} + \frac{U_L}{2\sigma_s}(B_s^{1/2} - 1)\exp(2\sigma_s x), \quad (31)$$

$$S_{1b}(x)=W_L\left\{\frac{2}{3}B^{2/3}\frac{l_b}{b_b}\left[\sqrt{\left[1+\frac{b_b}{l_bB_b}(x+l)\right]^3}-1\right]-(x+l)\right\},\ S_{2b}(x)\approx\frac{W_L\sqrt{B_b}-1}{2\sigma_b}e^{2\sigma_b(x+l)},\qquad(32)$$

где $B_i=1+b_i$, $b_{sb}=\delta_{2s}W_0(2+\delta_{2s}W_0)$. Принимая во внимание равенства $g_{0g}(0)=\delta_{2g}\Theta_0$, $\sqrt{B_g}=1+\delta_{2g}\Theta_0$, $\sqrt{B_s}=1+\delta_{2s}\Theta_0$, $g_{0s}(0)=\delta_{2s}\Theta_0$, $g_{0s}(-l)=\delta_{2s}W_0$, $g_b(-l)=\delta_{2b}W_0$ и учитывая условие $l_g >> \mu_g$, получаем $S_{1g}(0)\approx-0.5\Theta_L\delta_{2g}\Theta_0\sigma_g^{-1}$, $S_{2g}(0)=0$, $S_{1s}(0)\approx-0.5V_L\delta_{2s}\Theta_0\sigma_s^{-1}$, $S_{2s}(0)\approx0.5U_L\delta_{2s}\Theta_0\sigma_s^{-1}$. Для рассматриваемого случая непрозрачных образцов единственно характерной длиной является длина тепловой диффузии $\mu(\omega)$ и в зависимости от соотношения между этой величиной и толщиной образца l в эксперименте могут реализоваться лишь два случая. Рассмотрим их подробно.

Термически толстые образцы. ($l>>\mu(\omega)$, $e^{-2\sigma_sl}\approx0$, $e^{-\sigma_sl}\approx0$, $\Delta\approx Z\approx e^{\sigma_sl}(b+1)$). С учетом $g<<1$ для линейных амплитуд получаем $\Theta_L\approx0.5(\kappa_s^{(0)}\sigma_s)^{-1}I_0A^{(0)}$, $U_L\approx\Theta_L$, $V_L\approx0$, $W_L=0$, $S_{1s}(0)\approx0$, $S_{1s}(-l)\approx0$, $S_{2s}(-l)=0$, $\Phi_{LS}(\omega,-l)\approx0$, $S_{2b}(-l)\approx0$. Тогда из (27) с учетом $|\Theta_L|<<\Theta_0$ следует

$$\Theta_{1N}(\omega,x)\approx\Theta_L\Theta_0[\delta_{2g}-\delta_{2s}-0.5(\delta_s-\delta_{2s})+0.25(\delta_g-\delta_{2g})+\delta_3].\qquad(33)$$

Выражение (28) и вид $S_{1g}(x)$ показывают, что нелинейная часть акустического колебания температуры газа, как и линейная, затухает в слое толщиной μ_g. Тогда и нелинейная составляющая возмущения давления, вносящая соответствующий вклад в ФА сигнал, как и линейная [10], определяется усреднением $\Phi_{1Ng}(\omega,x)$ по длине тепловой диффузии в газе

$$\delta p_{(1)N}(\omega)=\frac{\gamma p_0 2\pi\mu_g}{T_{00}l_g}\overline{\Phi}_{(1),Ng}(\omega)=\frac{\gamma p_0}{T_{00}l_g}\int_0^{2\pi\mu_g}\Phi_{(1)Ng}(\omega,x)dx,\qquad(34)$$

где γ — показатель адиабаты; $T_{00}=T_0+\Theta_0$; p_0 — равновесное значение давления. Вследствие того что толщина слоя $2\pi\mu$ достаточно мала, функции $g_{0g}(x)$, $S_{1g}(x)e^{2\sigma_sx}$, $S_{2g}(x)$ в области $0\le x\le2\pi\mu_g$ становятся плавными. Это позволяет при вычислении этих интегралов воспользоваться приближением $\int_0^{2\pi\mu_n}f(x)\exp(-\sigma_gx)dx\approx f(0)\sigma_g^{-1}$. Подставляя (33) в (28), а затем полученное выражение для $\Phi_{1Ng}(\omega,x)$ в (34), выполняя интегрирование и простые алгебраические вычисления, а также учитывая равенство $\delta p_L=(\gamma p_0\Theta_L/T_{00}l_g\sigma_g)$, для нелинейного составляющего акустического колебания в буферном газе получаем

$$\delta p_{1N}(\omega,l>>\mu)=\delta p_L(\omega)K_{1N(1)}(l>>\mu)\Theta_0,\qquad(35)$$

где $K_{1N(1)}(l>>\mu)=\delta_3-0.5(\delta_{2s}+\delta_s)$ — коэффициент нелинейности, состоящий из комбинации ТК теплопроводности, теплоемкости и степени черноты образца. Выражение (35) можно представить в виде $\delta p_{1N}(\omega,l>>\mu)=|\delta p_{1N}|e^{i\psi_{1N}}$, где $|\delta p_{1N}|$ и ψ_{1N} являются амплитудой и фазой генерируемого сигнала:

$$|\delta p_{1N}|=\frac{\gamma p_0\mu_s^{(0)}\mu_g^{(0)}A^{(0)}I_0}{4T_{00}l_gk_s^{(0)}}|K_{1N(1)}(l>>\mu_s)|\Theta_0,\quad \psi_{1N(1)}(l>>\mu)=\begin{cases}-\pi/2,\text{если } K_{1N(1)}>0\\ \pi/2,\text{если } K_{1N(1)}<0\end{cases}.\qquad(36)$$

Термически тонкие образцы. Принимая $l<<\mu(\omega)$, $e^{2\sigma_sl}\approx1$, $e^{\sigma_sl}\approx1$, $e^{-\sigma_sl}\approx1$, $\Delta=2b$, $Z=2$, $S_{1s}(-l)-S_{1s}(0)=0$, $S_{2s}(-l)-S_{2s}(0)=0$, из (27) получаем

$$\Theta_{1N}(\omega,x)=\{\Theta_L[g_{0g}(0)-g_{0s}(0)]+R_{1g}[S_{2g}(0)-S_{1g}(0)]\}+\frac{A^{(0)}I_0\delta_3\Theta_0}{2\kappa_b^{(0)}\sigma_b}+$$
$$+g_{0s}(-l)\Phi_{LS}(\omega,-l)-g_{0b}(-l)W_L-2R_{1b}S_{2b}(-l).\qquad(37)$$

Для рассматриваемого случая другие величины, входящие в (27), определены в виде $\Theta_L=\dfrac{I_0A^{(0)}}{2\kappa_b^{(0)}\sigma_b}$,

$U_L=\dfrac{I_0A^{(0)}}{4\kappa_s^{(0)}\sigma_s}+\dfrac{\Theta_L}{2}$, $V_L=\dfrac{\Theta_L}{2}-\dfrac{I_0A^{(0)}}{4\kappa_s^{(0)}\sigma_s}$, $W_L=\Theta_L$, $S_{1s}(-l)=-(0.5V_L\sigma_s^{-1}+U_Ll)\delta_{2s}\Theta_0\approx-0.5V_L\sigma_s^{-1}\delta_{2s}\Theta_0$,

$S_{2s}(-l) = (0.5U_L\sigma_s^{-1} - V_L l)\delta_{2s}\Theta_0 = 0.5U_L\sigma_s^{-1}\delta_{2s}\Theta_0$, $S_{2b}(-l) \approx 0.5W_L W_0 \delta_{2b}\sigma_b^{-1}$, которые, в частности, приводят к равенствам $S_{1s}(-l)-S_{1s}(0)=0$, $S_{2s}(-l)-S_{2s}(0)=0$. Подставляя эти выражения в (37), для Θ_{1N} имеем

$$\Theta_{1N} = \Theta_L\{\Theta_0[\delta_{2g} + 0.25(\delta_g - \delta_{2g}) + \delta_3 - \delta_{2s}] + W_0[\delta_{2s} - \delta_{2b} - 0.5(\delta_b - \delta_{2b})]\}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (28), а затем полученное выражение в (34) и выполняя интегрирование, для ОГ нелинейного составляющего акустического колебания давления получаем

$$\delta p_{1N}(\omega, l << \mu) = \delta p_L(\omega)[K_{1N(1)}(l << \mu)\Theta_0 + K_{1N(2)}(l << \mu)W_0], \quad (39)$$

где

$$K_{1N(1)}(l << \mu) = \delta_3 - \delta_{2s},\ K_{1N(2)}(l << \mu) = \delta_{2s} - \delta_{2b} - 0.5(\delta_b - \delta_{2b}) \quad (40)$$

являются нелинейными коэффициентами и состоят из комбинаций ТК соответствующих параметров образца и подложки. Формула (39) показывает, что в рассматриваемом случае параметры ОГ нелинейного ФА отклика зависят от температуры как облучаемой, так и тыловой стороны поверхности образца, а также от ТК теплофизических величин образца, подложки и оптического параметра образца.

Выражение (39) можно представить в виде

$$\delta p_{1N}(\omega, l << \mu) = \left|\delta p_{1N}(\omega, l << \mu)\right| \exp[i\psi_{1N}(l << \mu)],$$

где величины

$$\left|\delta p_{1N}(\omega, l << \mu)\right| = \frac{\gamma p_0 I_0 A^{(0)}\mu_b\mu_g}{4T_{00}l_g\kappa_b^{(0)}}[K_{1N(1)}(l << \mu)\Theta_0 + K_{1N(2)}(l << \mu)W_0], \quad (41)$$

$$\psi_{1N(1)}(l << \mu) = \begin{cases} \pi/2, \text{если } [K_{1N(1)}(l << \mu)\Theta_0 + K_{1N(2)}(l << \mu)W_0] < 0, \\ -\pi/2, \text{если } [K_{1N(1)}(l << \mu)\Theta_0 + K_{1N(2)}(l << \mu)W_0] > 0' \end{cases} \quad (42)$$

являются амплитудой и фазой генерируемого ФА сигнала.

Согласно (36) и (41), частотная зависимость амплитуды ОГ нелинейного ФА сигнала как для термически тонких, так и для термически толстых образцов подчиняется закону $\sim\omega^{-1}$, а зависимость амплитуды этого ФА сигнала от интенсивности падающего луча является нетривиальной и определяется в виде $\sim I_0\Theta_0\ (I_0)$ или $\sim I_0\left\{K_{1N(1)}(l << \mu)\Theta_0(I_0) + K_{1N(2)}(l << \mu)W_0(I_0)\right\}$.

Вторая гармоника. Исходя из (8) и принимая $\Phi_L^2 \approx \Phi_L^2(\omega, x)\exp(i2\omega t)$, полагаем $\Phi_{2i}(t, x) = \Phi_{2i}(\omega, x)\exp(i2\omega t)$, тогда для функции $\Psi_{2i}(\omega, x) = \Phi_{2Ni}(\omega, x) + 0.5\delta_{2i}\Phi^2{}_{Li}(\omega, x)$ получаем:

$$\frac{d^2\Psi_{2g}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2\Psi_{2g} = \frac{\delta_g - \delta_{2g}}{2}\sigma_{2g}^2\Phi_{Lg}^2(\omega, x), \quad (43)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2s}}{dx^2} - \sigma_{2s}^2\Psi_{2s} = \frac{\delta_s - \delta_{2s}}{2}\sigma_{2s}^2\Phi_{Ls}^2(\omega, x), \quad (44)$$

$$\frac{d^2\Psi_{2b}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2\Psi_{2b} = \frac{\delta_b - \delta_{2b}}{2}\sigma_{2b}^2\Phi_{Lb}^2(\omega, x), \quad (45)$$

где $\sigma_{2i}^2 = 2i\omega(\chi_i^{(0)})^{-1}$, $\sigma_{2i} = (1+i)\mu_{2i}^{-1}$, $\mu_{2i} = \mu_i/\sqrt{2}$ — длина тепловой диффузии ВГ ФА сигнала. Используя обозначения $R_{2i} = 0.25(\delta_i - \delta_{2i})\sigma_{2i}$,

$$W_{1g}(\omega, x) = R_{2g}\int e^{-\sigma_{2g}x}\Phi_{Lg}^2(\omega, x)dx,\ W_{2g}(\omega, x) = R_{2g}\int e^{\sigma_{2g}x}\Phi_{Lg}^2(\omega, x)dx, \quad (46)$$

$$W_{1s}(\omega, x) = R_{2s}\int e^{-\sigma_{2s}x}\Phi_{Ls}^2(\omega, x)dx,\ W_{2s}(\omega, x) = R_{2s}\int e^{\sigma_{2s}x}\Phi_{Ls}^2(\omega, x)dx, \quad (47)$$

$$W_{1b}(\omega, x) = R_{2b}\int e^{-\sigma_{2b}(x+l)}\Phi_{Lb}^2(\omega, x)dx,\ W_{2b}(\omega, x) = R_{2b}\int e^{\sigma_{2b}(x+l)}\Phi_{Lb}^2(\omega, x)dx, \quad (48)$$

решения уравнений (43)—(45) для газа, образца и подложки представим в виде

$$\Psi_{2g}(\omega, x) = \Theta_{2Ng}e^{-\sigma_{2g}x} + e^{\sigma_{2g}x}W_{1g}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2g}x}W_{2g}(\omega, x), \quad (49)$$

$$\Psi_{2s}(\omega, x) = U_{2N}e^{\sigma_{2s}x} + V_{2N}e^{-\sigma_{2s}x} + e^{\sigma_{2s}x}W_{1s}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2s}x}W_{2s}(\omega, x), \quad (50)$$

$$\Psi_{2b}(\omega, x) = W_{2N}e^{\sigma_{2b}(x+l)} + e^{\sigma_{2b}(x+l)}W_{1b}(\omega, x) - e^{-\sigma_{2b}(x+l)}W_{2b}(\omega, x). \quad (51)$$

Амплитуды Θ_{2N}, U_{2N}, V_{2N} и W_{2N} подлежат определению из граничных условий (11), (12). Однако необходимо определить вид функций $\Phi_{1i}(\omega, x)$ и $\Phi_{2i}(\omega, x)$. Подставим выражения для $\Phi_{Lg}(\omega, x)$, $\Phi_{Ls}(\omega, x)$ и $\Phi_{Lb}(\omega, x)$ в (46)—(48) и выполним интегрирование для этих функций:

$$W_{1g}(\omega,x) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{\sigma_{2g}+2\sigma_g} e^{-(\sigma_{2g}+2\sigma_g)x}, \quad W_{2g}(\omega,x) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{2\sigma_g-\sigma_{2g}} e^{-(2\sigma_g-\sigma_{2g})x}, \tag{52}$$

$$W_{1s}(\omega,x) = -R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s} e^{(2\sigma_s-\sigma_{2s})x} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} e^{-\sigma_{2s}x} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s} e^{-(\sigma_{2s}+2\sigma_s)x}\right], \tag{53}$$

$$W_{2s}(\omega,x) = R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s} e^{(2\sigma_s+\sigma_{2s})x} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} e^{\sigma_{2s}x} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s} e^{(\sigma_{2s}-2\sigma_s)x}\right], \tag{54}$$

$$W_{1b}(\omega,x) = \frac{W_L^2 R_{2b}}{2\sigma_b-\sigma_{2b}} e^{-(\sigma_{2s}-2\sigma_s)(x+l)}, \quad W_{2b}(\omega,x) = \frac{W_L^2 R_{2b}}{2\sigma_b+\sigma_{2b}} e^{(\sigma_{2s}+2\sigma_s)(x+l)}. \tag{55}$$

Очевидно, что ВГ ФА сигнала генерируется тепловой волной на этой же частоте в буферном газе и описывается $\Phi_{2Ni}(\omega,x) = \Psi_{2g}(\omega,x) - 0.5\delta_{2i}\Phi_{Li}^2(\omega,x)$. Из (49) видно, что для определения вида $\Phi_{2Ng}(\omega,x)$ достаточно получить соответствующую формулу лишь для Θ_{2Ng}, поскольку другие функции, входящие в $\Phi_{2g}(\omega,x)$, рассчитаны с помощью (52). Принимая во внимание равенства $\sigma_b/\sigma_s = \sigma_{2b}/\sigma_{2s}$ и $b = k_b^{(0)}\sigma_b / k_s^{(0)}\sigma_s = k_b^{(0)}\sigma_{2b} / k_s^{(0)}\sigma_{2s}$, для нахождения Θ_{2Ng} из граничных условий (11), (12) получаем:

$$\Theta_{2N} = \Delta^{-1}\left[Y_1 \exp(-\sigma_{2s}l) + Y_2 \exp(\sigma_{2s}l) - 4bW_{2b}(\omega,-l) - b(\delta_{2b}-\delta_{2s})W_L^2)\right], \tag{56}$$

где $Y_1 = \left\{W_{2g}(\omega,0)(1-g) - W_{1g}(\omega,0)(g+1) + 2W_{1s}(\omega,0) - 0.5\left[\frac{A^{(0)}I_0\delta_3\Theta_L}{k_s^{(0)}\sigma_{2s}} - (\delta_{2g}-\delta_{2s})\Theta_L^2\right] - 2W_{1s}(\omega,-l)\right\}(b-1)$,

$$Y_2 = \left\{W_{2g}(\omega,0)(g+1) + W_{1g}(\omega,0)(g-1) - 2W_{2s}(\omega,0) + 0.5\left[\frac{A^{(0)}I_0\delta_3\Theta_L}{k_s^{(0)}\sigma_{2s}} + (\delta_{2g}-\delta_{2s})\Theta_L^2\right] + 2W_{2s}(\omega,-l)\right\}(b+1).$$

Используя (52)—(55) для функций, входящих в Θ_{2N}, Y_1 и Y_2, получаем

$$W_{1g}(\omega,0) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{\sigma_{2g}+2\sigma_g}, W_{1s}(\omega,0) = -R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s}\right],$$

$$W_{2g}(\omega,0) = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{2\sigma_g-\sigma_{2g}}, W_{1b}(\omega,-l) = \frac{W_L^2 R_{2b}}{2\sigma_b-\sigma_{2b}}, \ W_{2s}(\omega,0) = R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s}\right],$$

$$W_{1s}(\omega,-l) = -R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s} e^{-(2\sigma_s-\sigma_{2s})l} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} e^{\sigma_{2s}l} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s} e^{(\sigma_{2s}+2\sigma_s)l}\right],$$

$$W_{2s}(\omega,-l) = R_{2s}\left[\frac{U_L^2}{\sigma_{2s}+2\sigma_s} e^{-(2\sigma_s+\sigma_{2s})l} + \frac{2U_L V_L}{\sigma_{2s}} e^{-\sigma_{2s}l} + \frac{V_L^2}{\sigma_{2s}-2\sigma_s} e^{-(\sigma_{2s}-2\sigma_s)l}\right], \ W_{2b}(\omega,-l) = \frac{W_L^2 R_{2b}}{2\sigma_b+\sigma_{2b}}.$$

Определим приращение акустического давления на ВГ, для чего проведем усреднение $\Phi_{2Ng}(\omega,x)$ по толщине слоя $2\pi\mu_{2g}$:

$$\delta p_2(\omega) = \frac{\gamma p_0 2\pi\mu_g}{T_{00}l_g}\bar{\Phi}_{2N}(\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_{00}l_g}\int_0^{2\pi\mu_g}\Phi_{2N}(\omega,x)dx = \frac{\gamma p_0 J_{2N}}{T_{00}l_g}. \tag{57}$$

Здесь $J_{2N} = \Theta_{2N}J_1 - 0.5\delta_{2g}J_2 + J_3 - J_4$, $J_1 = \int_0^{2\pi\mu_g}\exp(-\sigma_{2g}x)dx = \frac{1}{\sigma_{2g}}$,

$$J_3 = \int_0^{2\pi\mu_g}\exp[(\sigma_{2g}x)]W_{1g}(\omega,x)dx = -\frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{2\sigma_g(2\sigma_g+\sigma_{2g})}, \ J_2 = \int_0^{2\pi\mu_g}\Phi_{Lg}^2(\omega,x)dx = \frac{\Theta_L^2}{2\sigma_g},$$

$$J_4 = \int_0^{2\pi\mu_g}\exp[(-\sigma_{2g}x)]W_{2g}(\omega,x)dx = \frac{\Theta_L^2 R_{2g}}{2\sigma_g(\sigma_{2g}-2\sigma_g)}.$$

Выполним анализ выражения (56) для двух выше приведенных случаев с учетом $g << 1$.

Для термически толстых образцов $Y = (b+1)\exp(\sigma_{2s} l)$, $Y_1 \exp\left(-\sigma_{2s} l\right) \approx 0$, $\Theta_L = I_0 A^{(0)} (2k_s^{(0)} \sigma_s)^{-1}$, $U_L = \Theta_L$, $V_L \equiv 0$, $W_l = 0$, $W_{2s}(\omega, -l) \approx W_{1s}(\omega, -l) \approx 0$. Тогда из (56) следует

$$\Theta_{2N} = [W_{2g}(\omega,0) - W_{1g}(\omega,0) - 2W_{2s}(\omega,0)] + \Theta_L^2 \left[\frac{\sigma_s \delta_3}{\sigma_{2s}} + 0.5(\delta_{2g} - \delta_{2s}) \right]. \tag{58}$$

Подставляя (58) в выражение для $\Phi_{2Ng}(\omega, x)$, а затем полученное выражение в (57) и выполняя необходимые вычисления, из (57) для акустического колебания давления на ВГ получаем:

$$\delta p_{2N}(2\omega, l >> \mu_s) = -\frac{\gamma p_0 (A^{(0)})^2 I_0^2 \mu_s^2 \mu_{2g}}{16 l_g T_{00} (\kappa_s^{(0)})^2} \frac{(1+i)}{2} K_{2N}^{(1)}(l >> \mu_s), \tag{59}$$

где

$$K_{2N}^{(1)}(l >> \mu_s) = \sqrt{2}\delta_3 + (2+\sqrt{2})^{-1}[2\delta_{2g} - \delta_g - \sqrt{2}\delta_s - 2\delta_{2s}] \tag{60}$$

— нелинейный коэффициент, состоящий из комбинации ТК образца и газа и не зависящий от ТН подложки. Выражение (59) можно записать в виде $\delta p_{2N}(2\omega, l >> \mu_s) = \left|\delta p_{2N}(2\omega, l >> \mu_s)\right| \times$ $\times \exp[(i\psi_{2N}(l >> \mu_s)]$, где

$$\left|\delta p_{2N}(2\omega, l >> \mu_s\right| = \frac{\gamma p_0 (A^{(0)})^2 I_0^2 \mu_s^2 \mu_{2g}}{16\sqrt{2} l_g T_{00} (\kappa_s^{(0)})^2} K_{2N}^{(1)}(l >> \mu_s) \tag{61}$$

— амплитуда, $\psi_{2N}(l >> \mu_s)$ — фаза этого сигнала. Из (59) следует, что для рассматриваемого случая амплитуда сигнала ВГ уменьшается с ростом частоты по закону $\sim\omega^{-3/2}$, а фаза этого сигнала зависит от знака: если $\left|K_{2N}^{(1)}(l >> \mu_s)\right| > 0$, то $\psi_{2N}(l >> \mu_s)) = 5\pi/4$; если $\left|K_{2N}^{(1)}(l >> \mu_s)\right| < 0$, то $\psi_{2N}(l >> \mu_s) = \pi/4$.

Для термически тонких образцов $\Delta = 2b$,

$$Y_1 = (b-1)\left[W_{2g}(\omega,0) - W_{1g}(\omega,0) + 2W_{1s}(\omega,0) - 0.5\left(\frac{A^{(0)} I_0 \delta_3 \Theta_L}{k_s^{(0)} \sigma_{2s}} - (\delta_{2g} - \delta_{2s})\Theta_L^2 \right) - 2W_{1s}(\omega, -l) \right], \tag{62}$$

$$Y_2 = (b+1)\left[W_{2g}(\omega,0) - W_{1g}(\omega,0) - 2W_{2s}(\omega,0) + 0.5\left(\frac{A^{(0)} I_0 \delta_3 \Theta_L}{k_s^{(0)} \sigma_{2s}} + (\delta_{2g} - \delta_{2s})\Theta_L^2 \right) + 2W_{2s}(\omega, -l) \right]. \tag{63}$$

Подставляя (62), (63), а также выражения для $W_{1g}(\omega, 0)$, $W_{2g}(\omega, 0)$, $W_{1s}(\omega, 0)$, $W_{2s}(\omega, 0)$, $W_{1s}(\omega, -l)$, $W_{2s}(\omega, -l)$ в (56) и выполняя интегрирование, получаем:

$$\delta p_{2N}(2\omega, l << \mu_s) = \frac{\gamma p_0 (A^{(0)})^2 I_0^2 \mu_b^2 \mu_{2g}}{16\sqrt{2} l_g T_{00} (\kappa_b^{(0)})^2} K_{2N}^{(2)}(l << \mu_s) \exp[-3\pi i/4)], \tag{64}$$

$$K_{2N}^{(2)}(b,\ l << \mu_s) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}[2\delta_{2g} - \delta_g) - \sqrt{2}(\sqrt{2}\delta_{2b} + \delta_b)] + \sqrt{2}\delta_3. \tag{65}$$

Отсюда следует, что для данного случая нелинейный коэффициент не зависит от ТК теплофизических параметров образца. Выражения (61) и (64) показывают, что амплитуда ВГ нелинейного ФА сигнала уменьшается с ростом частоты модуляции оптического излучения по закону $\sim\omega^{-3/2}$, а также квадратично зависит как от I_0, так и от степени черноты образца $A^{(0)}$.

Заключение. Параметры возбуждаемого нелинейного фотоакустического сигнала на основную и вторую гармоники достаточно чувствительны не только к термическим коэффициентам теплофизических параметров всех слоев, входящих в фотоакустическую камеру, но и к степени черноты образца и ее термическим коэффициентам. Экспериментальное исследование основной и второй гармоник нелинейного фотоакустического сигнала в сочетании с линейным сигналом может стать весьма информативным инструментом и позволит определять численные значения и температурные зависимости оптических и теплофизических параметров твердотельных образцов.

[1] **В. Э. Гусев, А. А. Карабутов.** Лазерная оптоакустика, Москва, Наука (1991)
[2] **С. А. Винокуров.** Журн. прикл. спектр., **42**, № 1 (1985) 5—16 [**S. A. Vinokurov.** J. Appl. Spectr., **42** (1985) 1—10]
[3] **A. C. Tam.** Rev. Mod. Phys., **58**, N 2(1986) 381—431
[4] **С. В. Егерев, Л. М. Лямшев, О. В. Пученков.** УФН, **160**, № 9 (1990) 111—154
[5] **А. М. Ашуров, У. Мадвалиев, В. В. Проклов, В. К. Рунов.** Журн. прикл. спектр., **54**, № 3 (1991) 503—506
[6] **Г. С. Митюрич, Е. Г. Стородубцев.** Инж. физ. журн., **70**, № 1 (1997) 153—155
[7] **Г. С. Митюрич, Е. В. Черненок, А. Н. Сердюков.** Журн. прикл. спектр., **82**, № 2 (2015) 260—265 [**G. S. Mityurich, E. V. Chernenok, A. N. Serdyukov.** J. Appl. Spectr., **82** (2015) 254–259]
[8] **Г. С. Митюрич, Е. В. Черненок, В. В. Свиридова, А. Н. Сердюков.** Кристаллография, **60**, № 2 (2015) 273—279
[9] **L. O. Usoltseva, D. S. Volkov, D. A. Nedosekin, M. V. Korobov, M. A. Proskurnin, V. P. Zharov.** Photoacoustics, **12** (2018) 55—66
[10] **A. Rosencwaig, A. Gersho.** J. Appl. Phys., **47**, N 1 (1976) 64—69
[11] **Y. N. Rajakarunanayake, H. K. Wickramasinghe.** Appl. Phys. Lett., **48** (1986) 218—220
[12] **G. C. Wetsel, J. M. Spicer.** Can. J. Phys., **64** (1986) 1269—1275
[13] **O. Doka, A. Miklos, A. Lorincz.** Appl. Phys., **A48** (1989) 415—417
[14] **C. Wang, P. Li.** J. Appl. Phys., **49** (1993) 5713—5717
[15] **V. Gusev, A. Mandelis, R. Bleiss.** Int. J. Thermophys., **14** (1993) 321—337
[16] **A. Mandelis, A. Salnick, J. Opsal, A. Rosenswaig.** J. Appl. Phys., **85** (1999) 1811—1821
[17] **S. B. Peralta, H. H. Al-Khafaji, A. W. Williams.** Nondestr. Test. Eval., **6** (1991) 17—23
[18] **M. Suvradip, D. M. Petrovic, S. R. Lukic, M. D. Dramicanin.** J. Optoelectron. Adv. Mater., **9** (2007) 2691—2695
[19] **Z. Zhenhui, S. Yujiao, Y. Sihua.** Opt. Lett., **43** (2018) 2336—2339
[20] **У. Мадвалиев, Т. Х. Салихов, Д. М. Шарифов, Н. А. Хан.** Журн. прикл. спектр., **73**, № 2 (2006) 170—176 [**U. Madvaliev, T. Kh. Salikhov, D. M. Sharifov, N. A. Khan.** J. Appl. Spectr., **73** (2006) 185—193]
[21] **У. Мадвалиев, Т. Х. Салихов, Д. М. Шарифов.** Журн. тех. физ., **76**, № 6 (2006) 87—97