Т. 86, № 6 **ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ** НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 2019
V. 86, N 6 **JOURNAL OF APPLIED SPECTROSCOPY** NOVEMBER — DECEMBER 2019

РАВНОМЕРНО ПРИГОДНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ РАБИ

А. В. Леонов*, И. Д. Феранчук, О. Д. Скоромник, Н. К. Шан

УДК 535.14

Белорусский государственный университет,
220030, Минск, просп. Независимости, 4, Беларусь; e-mail: leonov.bsu@gmail.com

(Поступила 30 июля 2019)

Проведено систематическое исследование эффективности равномерно пригодного приближения для описания квантовой модели Раби вне рамок приближения вращающейся волны. Вычислены корреляционные характеристики электромагнитного поля в резонаторе и рассмотрены физические эффекты, которые обусловлены антивращающими слагаемыми в гамильтониане.
Ключевые слова: *модель Раби, двухуровневая система, квантовое поле, операторный метод.*

Efficiency of the uniformly available approximation for description of the quantum Rabi model beyond the rotating wave approximation is systematically investigated. Correlation characteristics of the electromagnetic field in a resonator are calculated and some physical effects due to presence of the counter-rotating terms in the Hamiltonian are considered.
Keywords: *Rabi model, two-level system, quantum field, operator method.*

Введение. Квантовая модель Раби (КМР) описывает взаимодействие двухуровневой системы (ДУС) с одномодовым квантовым полем в резонаторе [1, 2]. Она является одной из базовых моделей, которые используются для описания взаимодействия излучения с веществом, и имеет фундаментальное значение для многих задач квантовой оптики [3], квантовой информации [4] и физики конденсированных сред [5]. Различные приложения этой модели и ее обобщений весьма актуальны и в настоящее время (см. [6—8] и цитируемую там литературу). Как показано в [9], КМР является точно интегрируемой системой и задача о спектре ее стационарных состояний выражается через решения многочленных рекуррентных соотношений. Этот результат имеет принципиальное значение, однако собственные функции и собственные значения не представляются в замкнутой аналитической форме, что весьма затрудняет их использование для конкретных приложений при описании задач эволюции КМР, которые связаны с суммированием по всему спектру стационарных состояний системы. В связи с этим для исследования динамики КМР широко применяются простые аналитические решения для стационарных состояний, основанные на использовании приближения вращающейся волны (ПВВ) и являющиеся точными собственными функциями гамильтониана модели Джейнса—Каммингса (МДК) [10]. Однако область применимости МДК ограничена малыми значениями отстройки от резонанса и константы взаимодействия ДУС и поля. Большой интерес вызывает исследование систем, которым соответствует режим сильной связи КМР и физических эффектов, возникающих в этом режиме [11—14]. Существует большое число реализаций двухуровневой системы и резонаторов (сверхпроводящий кюбит, поляритон), соответствующих КМР с большой константой связи [15], которую можно непрерывно изменять в интервале порядка единицы [16]. Поэтому разработка методов достаточно простого описания КМР за рамками ПВВ остается актуальной задачей (см. [7, 15, 17, 18] и цитируемую там литературу).

UNIFORMLY AVAILABLE APPROXIMATION FOR SOME CHARACTERISTICS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE QUANTUM RABI MODEL
A. U. Leonau*, I. D. Feranchuk, O. D. Skoromnik, N. Q. San (*Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Prosp., Minsk, 220030, Belarus; e-mail: leonov.bsu@gmail.com*)

В работе [19] на основе операторного метода (ОМ) построено равномерно пригодное приближение (РПП) для стационарных состояний КМР, которое в нулевом приближении с высокой точностью аппроксимирует собственные значения гамильтониана КМР во всем диапазоне изменения отстройки и константы связи и позволяет построить итерационную схему для численной диагонализации гамильтониана КМР, быстро сходящуюся при оптимальном выборе вариационного параметра [20]. Аналогичная аппроксимация построена в [21, 22] путем обобщения приближения вращающейся волны. Недавно этот подход был улучшен за счет выбора вариационного параметра (см. [7] и цитируемую там литературу).

Полученные приближенные решения имеют простую аналитическую форму, ненамного более сложную, чем в случае ПВВ, что позволяет выполнять суммирование по всему набору квантовых чисел системы при вычислении рассматриваемых величин. В [20, 23] показано, что РПП позволяет описывать эволюцию ДУС и процессы релаксации в ней во всем диапазоне изменения амплитуды поля и отстройки от резонанса. В то же время важное прикладное значение КМР в квантовой оптике и теории информации связано не только с описанием эволюции атома (кюбита), но и с анализом в рамках этой модели корреляционных характеристик электромагнитного поля.

В настоящей работе проведено систематическое сравнение результатов вычисления подобных характеристик на основе ПВВ и РПП и показано, что использование РПП существенно расширяет возможности КМР при исследовании и оптимизации параметров таких систем и позволяет описать эффекты, которые не проявляются в рамках ПВВ, в частности образование “одетой” ДУС как связанного состояния атома и фотонов, возникающих из вакуумного состояния электромагнитного поля.

Равномерно пригодное приближение для стационарных состояний КМР. Напомним основные соотношения для решений задачи о стационарных состояниях КМР, полученных в рамках ПВВ и РПП. Безразмерная форма гамильтониана КМР в натуральной системе единиц ($\hbar = c = 1$) определяется хорошо известным выражением [24]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\Delta\hat{\sigma}_3 + \hat{a}^+\hat{a} + f(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^+)\,, \tag{1}$$

где $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ — операторы рождения и уничтожения квантов резонансной моды поля; частота поля $\omega = 1$ определяет масштаб измерения энергии системы; Δ — разность энергий между резонансными уровнями атома в единицах ω; f — безразмерная константа связи ДУС и поля, пропорциональная дипольному матричному элементу перехода между этими состояниями; $\hat{\sigma}_i$ — матрицы Паули.

В этой системе существует интеграл движения, который можно рассматривать как “комбинированную четность”:

$$\hat{P} = \hat{\sigma}_3\hat{S} = \hat{\sigma}_3 e^{i\pi\hat{a}^+\hat{a}}\,, \qquad [\hat{H}, \hat{P}] = 0\,. \tag{2}$$

В рамках ПВВ слагаемыми $\hat{\sigma}_+\hat{a}^+$ и $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ в гамильтониане (1) пренебрегают, что изменяет и интеграл движения системы, который в данном приближении соответствует сохранению суммарного числа возбуждений атома и поля:

$$\hat{H}_{\mathrm{RWA}} = \frac{1}{2}\Delta\hat{\sigma}_3 + \hat{a}^+\hat{a} + f(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+)\,,$$

$$\hat{J} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_3 + \hat{a}^+\hat{a}\,,\ [\hat{H}_{\mathrm{RWA}}, \hat{J}] = 0\,. \tag{3}$$

В этом случае стационарное уравнение Шрёдингера $\hat{H}_{\mathrm{RWA}}\left|\psi_n^{(\pm)}\right\rangle = E_n^{(\pm)}\left|\psi_n^{(\pm)}\right\rangle$ имеет простые аналитические решения как для собственных значений энергии, так и для собственных векторов:

$$E_n^{(\pm)} = n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta - 1)^2 + 4f^2(n+1)}\,,$$

$$|\psi_n^{(\pm)}\rangle = a_n^{(\pm)}\chi_\uparrow\,|n\rangle + b_n^{(\pm)}\chi_\downarrow\,|n+1\rangle\,,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$E_0^{(-)} = -\frac{\Delta}{2}\,, \quad E_0^{(+)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Sign}(\Delta - 1)\sqrt{(\Delta - 1)^2 + 4f^2}\,,$$

$$|\psi_0^{(-)}\rangle = \chi_\downarrow\,|0\rangle\,, \quad |\psi_0^{(+)}\rangle = a_0^{(+)}\chi_\uparrow\,|0\rangle + b_0^{(+)}\chi_\downarrow\,|1\rangle\,, \tag{5}$$

где

$$a_n^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_n^{(\pm)})^2}}, \qquad b_n^{(\pm)} = -\frac{\lambda_n^{(\pm)}}{\sqrt{1+(\lambda_n^{(\pm)})^2}}, \tag{6}$$

$$\lambda_n^{(\pm)} \equiv \frac{(\Delta-1)\mp\sqrt{(\Delta-1)^2+4f^2(n+1)}}{2f\sqrt{n+1}}. \tag{7}$$

В то же время точные стационарные состояния КМР определяются системой уравнений:

$$\hat{H}\left|\psi_{np}\right\rangle = E_{np}\left|\psi_{np}\right\rangle,$$
$$\hat{P}\left|\psi_{np}\right\rangle = p\left|\psi_{np}\right\rangle, \tag{8}$$

где квантовое число $p = \pm 1$ определяет четность состояния, $n = 0, 1, ...$ — уровень возбуждения поля.

При решении этих уравнений вне рамок ПВВ в [19, 21] учтено, что связь атома с полем приводит к смещению положения равновесия полевых осцилляторов. Этот сдвиг можно описать с помощью канонического преобразования операторов:

$$\hat{b} = \hat{a} + u, \qquad \hat{b}^+ = \hat{a}^+ + u,$$
$$\hat{b} = \hat{R}^{-1}\hat{a}\hat{R}, \quad \hat{R} = e^{u\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right)} = e^{-u^2/2}e^{u\hat{a}^+}e^{-u\hat{a}},$$
$$|n,u\rangle = \frac{(\hat{a}^+ + u)^n}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}(\hat{a}^+)^k\,|0\rangle e^{-u^2/2}. \tag{9}$$

Используя u в качестве вариационного параметра, удается найти замкнутые аналитические формулы для E_{np} и $|\psi_{np}\rangle$, которые с высокой точностью аппроксимируют точные решения задачи во всем диапазоне изменения f, Δ и квантового числа n. Эти решения определяют РПП для описания состояний рассматриваемой системы и имеют вид:

$$E_{np} = n + \frac{1}{2}q - f^2 + \frac{1}{4}p\Delta(S_{n+q,n+q} + S_{nn}) - \frac{1}{2}qM, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$M = \sqrt{\left[1 + \frac{1}{2}\Delta(-1)^n(S_{n+q,n+q} - S_{nn})\right]^2 + \Delta^2 S_{n,n+q}^2}, \qquad q = p(-1)^n,$$
$$S_{km} = (-1)^m\sqrt{\frac{m!}{k!}}(2f)^{k-m}L_m^{k-m}(4f^2)e^{-2f^2}, \; k \ge m;\; S_{km} = S_{mk}, \tag{10}$$

где $L_m^k(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра;

$$|\psi_{np}\rangle = B_{np}\{\gamma|n,f\rangle + |n+q,f\rangle\}\chi_+ + pB_{np}\{(\gamma S_{nn} + S_{n,n+q})|n,f\rangle + (\gamma S_{n+q,n} + S_{n+q,n+q})|n+q,f\rangle\}\chi_-,$$
$$B_{np}^2 = \{(\gamma^2+1) + (\gamma S_{nn} + S_{n,n+q})^2 + (\gamma S_{n+q,n} + S_{n+q,n+q})^2\}^{-1},$$
$$\gamma = -\frac{p\Delta S_{n,n+q}}{2n + 2f^2 + p\Delta S_{nn} - 2E_{np}}, \quad \chi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow \pm \chi_\downarrow). \tag{11}$$

Для основного состояния (0,–) находим:

$$E_{0,-} = -f^2 - \frac{1}{2}\Delta S_{00}(f) = -f^2 - \frac{1}{2}\Delta e^{-2f^2},$$
$$|\psi_{0-}> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,f>\chi_+ - \sum_{k=0}^{\infty}S_{0k}(f)\,|k,f>\chi_-). \tag{12}$$

В работе [19] построена эффективная итерационная схема численного решения уравнений (8), позволяющая находить стационарные состояния КМР с любой необходимой точностью. Это дает возможность сравнить результаты аналитических аппроксимаций ПВВ и РПП с точным решением и определить границы применимости обоих приближений.

На рис. 1 представлена зависимость энергетических уровней системы от константы связи и отстройки от резонанса для различных квантовых чисел. Видно, что РПП интерполирует точные решения с достаточно высокой точностью при любых константах связи и квантовых числах, в то время как структура уровней в рамках ПВВ качественно отличается от точных решений в области параметров $f\sqrt{n} > 1$. Как показано в [25], такое изменение поведения уровней обусловлено квазипересечением энергетических термов системы, найденных в рамках ПВВ, при константе связи и квантовом числе n, определяемых из условий

$$E_n^{(+)}(f) = E_{(n+2)}^{(-)}(f)\,. \tag{13}$$

При точном резонансе решения уравнений (13) существуют при

$$f(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}) > 2\,, \qquad f\sqrt{n} \ge 1\,, \tag{14}$$

что и задает границы диапазона параметров системы, когда можно использовать ПВВ.

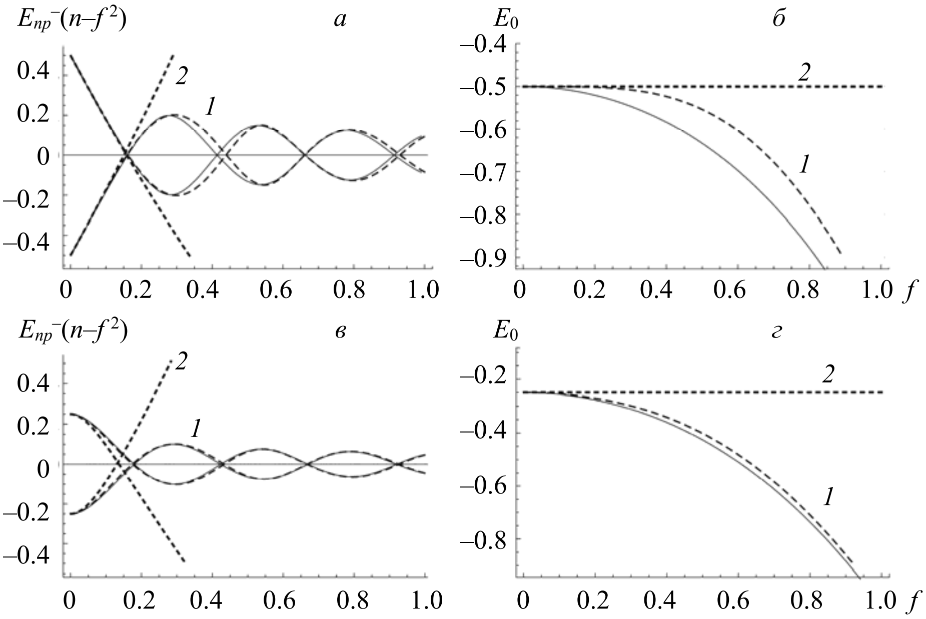

Рис. 1. Уровни энергии как функции константы связи: *а* — возбужденные состояния при $n = 10$, $p = \pm1$, $\Delta = 1.0$; *б* — основное состояние ($n = 0$, $p = -1$) при $\Delta = 1.0$; *в* — возбужденные состояния при $n = 10$, $p = \pm1$, $\Delta = 0.5$; *г* — основное состояние ($n = 0$, $p = -1$) при $\Delta = 0.5$; численное решение — сплошные линии; *1* — РПП; *2* — ПВВ

Рассмотрим точность аппроксимации вектора состояния системы в различных приближениях. Точную собственную функцию гамильтониана КМР представим в виде разложения по фоковскому базису свободного электромагнитного поля и спиновым состояниям невозмущенной ДУС:

$$|\psi_{np}\rangle = \sum_{ms} A_{ms}^{np}\,|m\rangle\chi_s\,. \tag{15}$$

Зависимость двух первых моментов от константы связи представлена на рис. 2.

Точность аппроксимации вектора состояния можно охарактеризовать с помощью моментов, определяющих отклонение по норме точных коэффициентов A_{ms}^{np} от их значений $A_{ms}^{np}(R)$ и $A_{ms}^{np}(U)$, вычисленных в рамках ПВВ и РПП:

$$\eta_l(F)^{np} = \frac{\sum\limits_{ms} m^l\,|A_{ms}^{np} - A_{ms}^{np}(F)|^2}{\sum\limits_{ms} m^l\,|A_{ms}^{np}|^2}\,, \qquad F = (R,\,U). \tag{16}$$

На рис. 3 показана зависимость коэффициентов заселенности фоковских состояний электромагнитного поля в резонаторе в стационарных состояниях системы от константы связи:

$$Q_{kn}^{s} = \sum_{p} |\chi_s\langle k\,|\,\psi_{np}\rangle|^2\,. \tag{17}$$

Эти коэффициенты имеют важное значение при описании эволюции КМР, и их поведение тесно связано с разницей в интегралах движения системы для обоих приближений. В рамках ПВВ отличны от нуля заселенности только двух соседних фоковских состояний поля, тогда как в точных решениях и в РПП заселенности этих состояний “расплываются” по интервалу $|k-n| \sim f\sqrt{n}$.

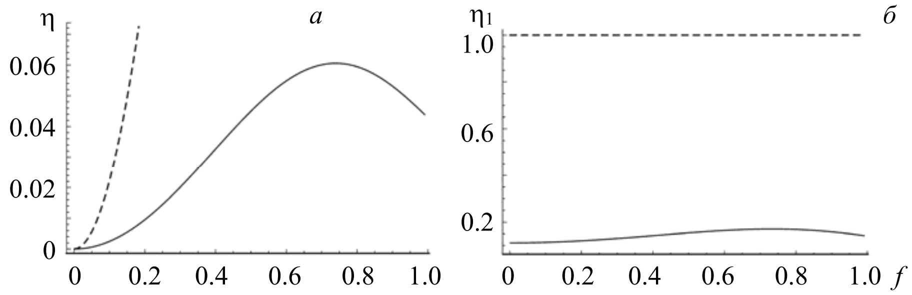

Рис. 2. Моменты η_0 (*а*) и η_1 (*б*) как функции константы связи для основного состояния КМР при резонансе: РПП — сплошные линии, ПВВ — штриховые

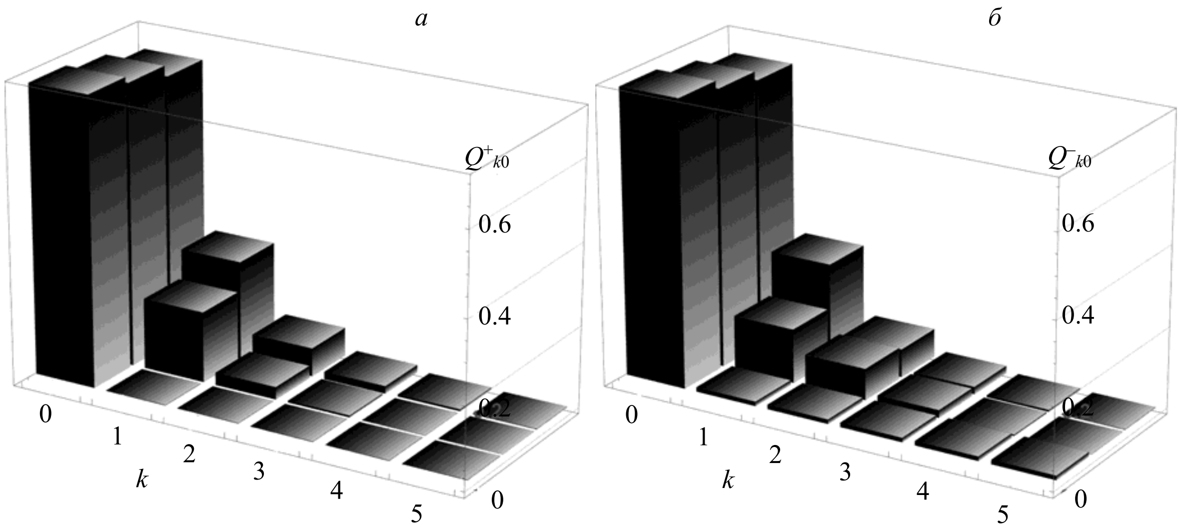

Рис. 3. Модули коэффициентов заселенности для основного состояния КМР при резонансе и $f = 0.25$: передний ряд — ПВВ, средний ряд — РПП, задний ряд — численное решение

Качественно отличается структура основного состояния системы в рамках ПВВ от точного решения и РПП для КМР. Действительно, состояние $|0\rangle\chi_{\downarrow}$, соответствующее вакууму электромагнитного поля, является точным собственным вектором гамильтониана (3). В то же время основное состояние КМР соответствует “одетой” ДУС — связанному состоянию кюбита и когерентного состояния электромагнитного поля, соответствующего ненулевым значениям числа фотонов в фоковском базисе. Образование такого состояния можно рассматривать как проявление “поляронного” эффекта, характерного для любых систем, соответствующих взаимодействию частицы с квантовым полем [26]. Энергия связи основного состояния “одетой” ДУС в рамках РПП определяется формулой:

$$E_B = E_{0,-} - (-\Delta/2) = -f^2 + \frac{1}{2}\Delta(1 - e^{-2f^2}), \tag{18}$$

а волновая функция (12) описывает “перепутанное” состояние ДУС и квантового поля. Простая формула (18) хорошо аппроксимирует точную зависимость энергии основного состояния от константы связи (рис. 1).

Характеристики электромагнитного поля в КМР. Как указано выше, область применимости ПВВ определяется параметром $f\sqrt{n}$. Напомним, что КМР возникает в результате аппроксимации оператора взаимодействия атомной системы с резонансной модой электромагнитного поля. Исходный гамильтониан для нерелятивистского атома имеет вид ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{a}} + \hat{H}_{\mathrm{int}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}},$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{e_0(\mathbf{pA})}{m_0} + \frac{e_0^2(\mathbf{A})^2}{2m_0},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}} V}} \mathbf{e}_s(\mathbf{k})[a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{kr}}], \quad (19)$$

где $\mathbf{A(r)}$ — векторный потенциал электромагнитного поля; e_0, m_0 — заряд и масса электрона ($e_0^2 \approx 1/137$); $a_{\mathbf{k}}^+$, $a_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$, частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ и поляризацией $\mathbf{e}_s(\mathbf{k})$; V — объем резонатора.

Аппроксимация этого гамильтониана, соответствующая КМР, состоит в учете только двух состояний атома $\chi_\uparrow$, $\chi_\downarrow$, для которых частота перехода $\Delta = E_\uparrow - E_\downarrow$ близка к частоте выделенной резонатором моды $\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega$, $\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega$, $a_{\mathbf{k}_0} = a$, $a_{\mathbf{k}_0}{}^+ = a^+$, и использовании дипольного приближения в операторе взаимодействия [17]. Предположим также, что резонансная мода обладает определенной поляризацией $\mathbf{e}_s(\mathbf{k}_0) = \mathbf{e}$. Тогда в базисе ДУС получаем:

$$\hat{H} = \omega\left[\frac{\Delta}{2}\sigma_3 + f(a+a^+)\sigma_1 + \frac{2\pi e_0^2}{2m_0\omega^2 V}(a+a^+)^2 + a^+a\right],$$

$$f = -e_0 v\sqrt{\frac{2\pi}{\omega^3 V}}, \quad v = \frac{1}{m_0}\chi_\uparrow(\mathbf{pe})\chi_\downarrow. \quad (20)$$

Если в этом операторе пренебречь квадратичным по полю “диамагнитным” слагаемым, то получаем гамильтониан КМР, спектр которого рассмотрен выше и показано, что использовать ПВВ для его расчета можно при выполнении условия

$$\xi = f\sqrt{<a>} \approx e_0 |v| \sqrt{\frac{2\pi\overline{n}}{V\omega^3}} < 1, \quad (21)$$

где $\overline{n}$ — среднее число фотонов резонансной моды поля.

Матричный элемент скорости выражается через дипольный момент перехода:

$$|v| = \omega\Delta \left|\left\langle\chi_\uparrow\middle|(\mathbf{re})\middle|\chi_\downarrow\right\rangle\right| \approx d\Delta, \quad (22)$$

где d — дипольный матричный элемент перехода ДУС.

Среднюю плотность фотонов $\overline{n}/V$ выразим через плотность энергии I электромагнитного поля в резонаторе:

$$\overline{n}/V\omega = I. \quad (23)$$

В результате получаем

$$\xi = \frac{e_0 d\Delta}{\omega}\sqrt{2\pi I}. \quad (24)$$

Таким образом, выход за рамки ПВВ при описании взаимодействия атомной системы с полем на основе КМР необходим, если плотность энергии в резонаторе

$$I > \frac{\omega^2}{2\pi e_0^2 d^2 \Delta^2} \equiv I_{\text{c}}. \quad (25)$$

Следует обратить внимание на то, что при достижении критической плотности энергии, когда необходим выход за рамки ПВВ, диамагнитный вклад в операторе (20) может стать сравнимым с линейным по полю слагаемым, на что указывалось в [15, 27]. Это обстоятельство можно учесть с помощью канонического преобразования полевых операторов в гамильтониане (20) для того, чтобы привести квадратичную форму по операторам поля к диагональному виду. В результате оператор (20) сводится к гамильтониану КМР с перенормированными параметрами:

$$\hat{H} = \tilde{\omega}\left[\frac{\tilde{\Delta}}{2}\sigma_3 + \tilde{f}(a+a^+)\sigma_1 + a^+a\right],$$

$$\tilde{\omega} = \omega\sqrt{1+\lambda}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{\sqrt{1+\lambda}}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\sqrt{1+\lambda}}, \quad \lambda = \frac{2\pi e_0^2}{m_0\omega^2 V}. \quad (26)$$

Таким образом, учет диамагнитного вклада не изменяет характерной структуры спектра КМР, однако поведение энергетических уровней системы в пределе сильной связи может существенно перенормироваться. Как показано выше, в этом пределе

$$E_{np} \approx \tilde{\omega}(n - \tilde{f}^2) = n\sqrt{1+\lambda} - \frac{f^2}{\sqrt{1+\lambda}} = n\sqrt{1 + \frac{2\pi e_0^2}{m_0\omega^2 V}} - \frac{\dfrac{2\pi e_0^2 \Delta^2 d^2}{V\omega^3}}{\sqrt{1 + \dfrac{2\pi e_0^2}{m_0\omega^2 V}}}. \tag{27}$$

Полученное выражение дает возможность оценить радиационный сдвиг уровней рассматриваемой системы.

Ранее [20] было исследовано изменение динамики ДУС в режиме сильной связи. Рассмотрим, как влияет учет “антивращающих” слагаемых в операторе КМР на статистические характеристики электромагнитного поля в резонаторе. Для этого сравним результаты вычисления на основе ПВВ и РПП следующих величин.

Вероятности обнаружения n квантов электромагнитного поля в момент времени t при условии, что при $t = 0$ система находилась в состоянии $|l,s\rangle \equiv |l\rangle\chi_s$:

$$P_n(t,f) = \sum_{s'} |<n,s'|\Psi(t)>|^2, \qquad |\Psi(0)\rangle = |l,s\rangle. \tag{28}$$

В общем случае эта величина является быстроосциллирующей функцией времени, но при наблюдении за системой в течение достаточно большого промежутка времени $T \gg 1/\omega$ она стремится к постоянной величине

$$<P_n(f)> = \frac{1}{T}\int_0^T P_n(t,f)dt = \sum_{s'mp} |<n,s'|\psi_{mp}>|^2 |<l,s|\psi_{mp}>|^2. \tag{29}$$

С помощью этого распределения вероятностей можно найти среднее число фотонов в резонаторе

$$<n(f)> = \sum_n n <P_n(f)> \tag{30}$$

и их вариацию [24]:

$$<(\Delta n)^2> = <n^2(f)> - <n(f)>^2. \tag{31}$$

На рис. 4 представлена зависимость среднего числа фотонов в полости и вариация числа фотонов, рассчитанных в рамках численного решения, РПП и ПВВ от константы связи. Как указано выше, наиболее существенное изменение в спектре состояний КМР относится к качественной перестройке основного состояния системы. Действительно, при помещении в резонатор с вакуумным электромагнитным полем ДУС в основном состоянии в полости возникает отличное от нуля электромагнитное поле, что можно интерпретировать как эффект “генерации” фотонов из вакуума, как это рассмотрено в [28] при численном анализе состояний КМР. Этот эффект не существует в рамках ПВВ, но хорошо описывается на основе РПП.

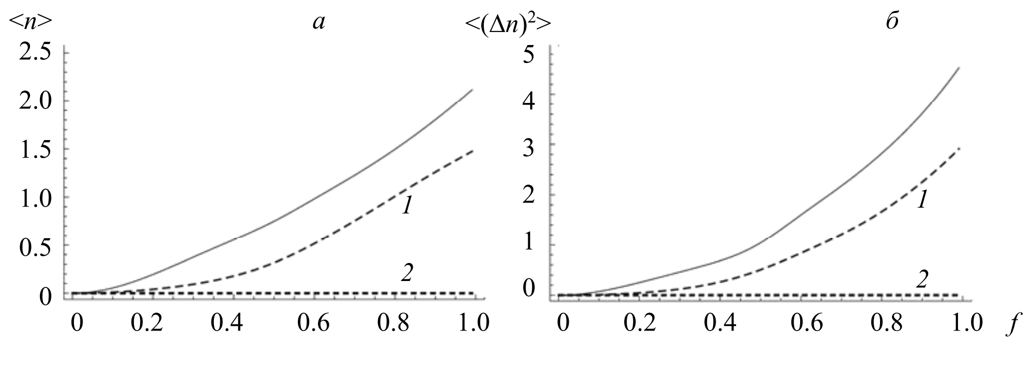

Рис. 4. Среднее число фотонов (*а*) и вариация числа фотонов (*б*) как функции константы связи для основного состояния КМР при резонансе; численное решение — сплошные линии; *1* — РПП; *2* — ПВВ

Заключение. Проведен анализ эффективности использования равномерно пригодного аналитического приближения операторного метода для описания стационарных состояний и наблюдаемых характеристик квантовой модели Раби вне рамок приближения вращающейся волны. Показано, что данное приближение находится в хорошем соответствии с численным решением и описывает все качественные особенности исследуемой системы. Описан новый “поляронный” эффект образования связанного состояния атома и поля в основном состоянии системы, обусловленный антивращающими слагаемыми в исходном гамильтониане.

[1] **I. I. Rabi.** Phys. Rev., **49** (1937) 324—328
[2] **I. I. Rabi.** Phys. Rev., **51** (1937) 652—654
[3] **H. Walter**, **B. T. H. Varcoe, B.-G. Englert, T. Becker.** Rep. Prog. Phys., **69** (2006) 1325
[4] **J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche.** Rev. Mod. Phys., **73** (2001) 565—582
[5] **T. Holstein.** Ann. Phys., **8** (1959) 325—342
[6] **A. V. Dodonov, A. Napoli, B. Militello.** Phys. Rev. A, **99** (2019) 033823
[7] **B.-B. Mao, L. Li, Y. Wang, W.-L. You, W. Wu, M. Liu, H.-G. Luo.** Phys. Rev. A, **99** (2019) 033834
[8] **C. J. Villas-Boas, D. Z. Rossatto.** Phys. Rev. Lett., **122** (2019) 123604
[9] **D. Braak.** Phys. Rev. Lett., **107** (2011) 100401
[10] **E. T. Jaynes**, **F. W. Cummings.** Proc. IEEE, **51** (1963) 89—109
[11] **J. Bourassa**, **J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov**, **O. Astafiev**, **Y. Nakamura, A. Blais.** Phys. Rev. A, **80** (2009) 032109
[12] **T. Niemczyk**, **F. Deppe**, **H. Huebl**, **E. Menzel**, **F. Hocke**, **M. Schwarz**, **J. Garcia-Ripoll**, **J. Zueco**, **T. Hummer**, **E. Solano.** Nature Phys., **6** (2010) 772
[13] **B. Peropadre**, **P. Forn-Dıaz**, **E. Solano, J. J. Garcıa-Ripoll.** Phys. Rev. Lett., **105** (2010) 023601
[14] **A. Ridolfo**, **M. Leib**, **S. Savasta, M. J. Hartmann.** Phys. Rev. Lett., **109** (2012) 193602
[15] **P. Forn-Dıaz**, **L. Lamata**, **E. Rico**, **J. Kono, E. Solano** Rev. Mod. Phys., **91** (2019) 025005
[16] **C. Ciuti**, **G. Bastard, I. Carusott.** Phys. Rev. B, **72** (2005) 115303
[17] **I. D. Feranchuk**, **A. V. Leonov, O. D. Skoromnik.** J. Phys. A: Mathemat. Theor., **49** (2016) 454001
[18] **A. Saiko**, **R. Fedaruk, S. Markevich.** J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys., **47** (2014) 155502
[19] **I. D. Feranchuk**, **L. I. Komarov, A. P. Ulyanenkov.** J. Phys. A, **29** (1996) 4035—4047
[20] **I. D. Feranchuk**, **A. V. Leonov.** Phys. Lett. A, **375** (2011) 385—389
[21] **E. K. Irish.** Phys. Rev. Lett., **99** (2007) 173601
[22] **E. K. Irish.** Phys. Rev. Lett., **99** (2007) 259901
[23] **I. D. Feranchuk**, **A. U. Leonau, M. M. Eskandari.** J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys., **50** (2017) 105501
[24] **M. O. Scully, M. S. Zubairy.** Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge (1997)
[25] **I. D. Feranchuk**, **A. V. Leonov.** Phys. Lett. A, **373** (2009) 4113—4116
[26] **H. Fröhlich.** Adv. Phys., **3** (1954) 325—361
[27] **M. D. Crisp.** Phys. Rev. A, **44** (1991) 563—573
[28] **T. Werlang**, **A. V. Dodonov**, **E. I. Duzzioni, C. J. Villas-Boas.** Phys. Rev. A, **78** (2008) 053805