Т. 87, № 2 **ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ** МАРТ — АПРЕЛЬ 2020
V. 87, N 2 **JOURNAL OF APPLIED SPECTROSCOPY** MARCH — APRIL 2020

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Н. Н. Роговцов [1*], В. Я. Анисимов [2]

УДК 517.937;535.36;537.86.029;537.87;621.371

*[1] Белорусский национальный технический университет,
220013, Минск, Беларусь; e-mail: rogovtsov@bntu.by*
*[2] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
220013, Беларусь, Минск; e-mail: anissimov@bsuir.by*

(Поступила 17 декабря 2019)

Выведено новое интегро-функциональное уравнение для четырехмерного преобразования Фурье четырехточечной функции когерентности пучка лазерного излучения в турбулентной среде и найдены два семейства точных аналитических решений данного уравнения. Эти решения имеют место для любого уровня флуктуаций показателя преломления воздуха. На их основе получены точные аналитические представления интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности. В частности, найдены усеченные спектральные характеристики пространственной корреляционной функции интенсивностей. Эти представления могут использоваться для тестирования асимптотических, численных и иных методов нахождения данной функции и для описания ее интегральных свойств.

Ключевые слова: *турбулентная среда, многократное рассеяние, флуктуация, четырехточечная функция когерентности, интегральная характеристика, усеченные спектральные характеристики, инвариантное погружение, биективное преобразование, аналитическое представление, пучок лазерного излучения.*

A new integro-functional equation for the four-dimensional Fourier transform of the four-point coherence function of a laser beam in a turbulent medium is derived and two families of exact analytical solutions of this equation are obtained. These solutions are valid for any level of air refractive index fluctuations. Exact analytical representations for integral characteristics of the fourth-order mutual coherence function are obtained on the basis of these solutions. In particular, the truncated spectrum characteristics of the spatial correlation function of intensities were sound. These representations can be used to test the asymptotical, numerical and other methods of finding this function and its integral properties.

Keywords: *turbulent medium, multiple scattering, fluctuation, fourth-order mutual coherence function, truncated spectral characteristics, integral characteristic, invariant embedding method, bijection transformation, analytical representation, laser beam.*

Введение. Корректное решение целого ряда научных и научно-технических проблем дистанционного зондирования, передачи информации в открытых оптических системах связи, геодезии, теории плазмы, оптики рассеивающих сред, теории переноса излучения и астрофизики практически невозможно без исследования влияния регулярных или случайных (дискретных или непрерывных) пространственно-временных изменений геометрических и физических (в частности, оптических) характеристик микроскопически неоднородных сред на процессы распространения излучения и формирования полей изучения в них. Классическими примерами указанных выше сред являются геофизиче-

EXACT ANALYTICAL REPRESENTATIONS FOR INTEGRAL CHARACTERISTICS OF FOURTH-ORDER MUTUAL COHERENCE FUNCTION FOR LASER BEAM IN TURBULENT MEDIUM

N. N. Rogovtsov [1*], V. Ya. Anissimov [2] (*[1] Belarusian National Technical University, Minsk, 220013, Belarus; e-mail: rogovtsov@bntu.by; [2] Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013, Belarus; e-mail: anissimov@bsuir.by*)

ские среды, к которым, в частности, относятся атмосфера Земли в различных ее состояниях и естественные или иные включения в ней. При этом в прозрачной части атмосферы Земли на распространение пучка лазерного излучения оказывают сильное влияние случайные флуктуации (они могут рассматриваться как непрерывные случайные изменения) показателя преломления $n(\mathbf{r},t)$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, t — время) воздуха, которые вызываются его турбулентным движением. Несмотря на очень небольшие ($\sim10^{-6}$—10^{-5}) амплитуды флуктуаций показателя преломления воздуха, пучок лазерного излучения на достаточно протяженных трассах проходит через очень большое количество оптических неоднородностей, что создает эффект накопления искажений параметров исходного пучка за счет многократного рассеяния на этих неоднородностях. Такого рода рассеяние лазерного излучения происходит практически полностью в направлении вперед, и рассеянием в обратном направлении можно пренебречь. Изменения поляризационных характеристик лазерного излучения из-за флуктуаций показателя преломления в земной атмосфере также весьма незначительны. Обоснование этих двух утверждений дано, в частности, в работах [1—3], причем оно в значительной мере основано на том, что характерный размер неоднородностей показателя преломления земной атмосферы значительно больше длины волны излучения λ. В ряде работ (см., например, [1—18] и ссылки там) с помощью различных теоретических и экспериментальных методов установлены некоторые фундаментальные закономерности распространения электромагнитного (в частности, лазерного) излучения в турбулентной среде. При этом теоретические исследования проводились в основном в рамках использования скалярного квазиоптического (параболического) приближения волновых и связанных с ними уравнений. Однако до сих пор даже не разработаны точные и эффективные методы отыскания статистических моментов (выше второго порядка) комплексных амплитуд волновых полей в случайно неоднородных средах. Следует особо подчеркнуть, что через моменты данного типа выражаются такие важные характеристики, как относительная дисперсия (индекс мерцаний) и пространственная корреляционная функция интенсивностей [13].

В настоящей работе выведено новое интегро-функциональное уравнение для четырехмерного образа по Фурье от четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';\, z)$ (она зависит от девяти переменных) пучка лазерного излучения. Данное уравнение содержит в качестве свободных величин один скалярный параметр и один двумерный вектор. При выводе этого уравнения использован ряд эвристических процедур метода редукции общих соотношений инвариантности (GIRRM), который является одним из общих и эффективных методов решения многомерных проблем теории переноса излучения и математической физики (см., например, [19—28] и ссылки там). Посредством анализа свойств выведенного интегро-функционального уравнения впервые найдены в явной форме точные аналитические представления для семейств интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности пучка лазерного излучения в турбулентной атмосфере. Данные представления верны для любого уровня флуктуаций показателя преломления воздуха. Эти представления могут использоваться при анализе точности асимптотических, численных и иных методов отыскания четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';\, z)$ и стать основой для строгого анализа ее свойств.

Постановка задачи. Пусть $[V]$ — замкнутое полупространство, на границе S которого расположена плоскость $OXYZ$ прямоугольной декартовой правой системы координат $OXYZ$. При этом ось Z направим внутрь $[V]$. Допустим, что $[V]$ заполнено случайно неоднородной средой, свойства которой идентичны свойствам некоторой прозрачной части турбулентной атмосферы Земли. На любой плоскости $z = \text{const}$ ($\text{const} \geq 0$) возьмем четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, положения которых определяются радиус-векторами $\mathbf{r}_1 = (\rho_{11},\rho_{12}, z)$, $\mathbf{r}_2 = (\rho_{21},\rho_{22}, z)$, $\mathbf{r}'_1 = (\rho'_{11},\rho'_{12}, z)$, $\mathbf{r}'_2 = (\rho'_{21},\rho'_{22}, z)$. Введем обозначения: $\rho_1 = (\rho_{11},\rho_{12})$, $\rho_2 = (\rho_{21},\rho_{22})$, $\rho'_1 = (\rho'_{11},\rho'_{12})$, $\rho'_2 = (\rho'_{21},\rho'_{22})$. Полагаем, что полубесконечная среда облучается пространственно ограниченным монохроматическим линейно поляризованным пучком излучения, проекции напряженности электрического поля которого на оси X и Y могут быть записаны в виде $e^{i(\omega t-kz)}U(\rho;\, z)$, где i — мнимая единица, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны излучения, ω — круговая частота излучения, $U(\rho;\, z)$ — комплексная амплитуда, которая является случайной функцией и незначительно изменяется на расстояниях порядка длины волны излучения ($\rho = (\rho_1,\rho_2)$ — двумерный вектор, параллельный плоскости OXY). Считаем, что мощность пучка — конечная величина. Кроме ранее сделанных допущений полагаем, что объем известной информации о когерентных свойствах пучка излучения достаточен для задания четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';\, z)$ на плоскости $z = 0$. Эта функция определяется следующим образом [13]:

$$\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z) = \langle U(\rho_1;z)U(\rho_2;z)U^*(\rho_1';z)U^*(\rho_2';z)\rangle, \quad (1)$$

где <…> означает операцию усреднения по ансамблю реализаций; * — символ операции комплексного сопряжения; величины $U(\rho_j;z)$, где $j\in\{1,2,3,4\}$, имеют смысл комплексных амплитуд волнового поля на плоскости, задаваемой аппликатой z и параллельной плоскости OXY, в точках M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно. В [1—3] различными методами в рамках описанных выше предположений и свойств турбулентной среды получено исходное уравнение для функции $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$:

$$\left[2ik\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{m=1}^{2}\left(\Delta_m-\Delta'_m\right)+\frac{ik^3}{4}F_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z\right)\right]\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z\right)=0\ ,\ \ z\in(0,+\infty). \quad (2)$$

Здесь Δ_m и Δ'_m — двумерные операторы Лапласа, которые в системе OXY задаются символическими равенствами $\Delta_m=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_{m1}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_{m2}^2}$, $\Delta'_m=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_{m1}'^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\rho_{m2}'^2}$, $m\in\{1,2\}$. Функция $F_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ в уравнении (2) опосредованно определяет влияние флуктуаций показателя преломления турбулентной атмосферы Земли на четырехточечную функцию когерентности $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ в процессе распространения излучения в положительном направлении оси Z. Она может быть записана в форме [13]:

$$F_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)=2\pi[H(\rho_1-\rho_1';z)+H(\rho_2-\rho_2';z)+H(\rho_1-\rho_2';z)+H(\rho_2-\rho_1';z)-H(\rho_2-\rho_1;z)-H(\rho_2'-\rho_1';z)], \quad (3)$$

где функция $H(\rho;z)$ определяется равенством

$$H(\boldsymbol{\rho};z)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{q};z)\left(1-\cos(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho})\right)dq_1dq_2,\ \ \mathbf{q}=(q_1,q_2),$$

а функция $\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{q};z)=\mathrm{const}\,\Phi_\varepsilon(\mathbf{q};z)$, где $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q};z)$ имеет смысл спектральной плотности флуктуаций диэлектрической проницаемости ε воздуха, которая с учетом соотношения $n=\sqrt{\varepsilon}$ непосредственно связана с плотностью флуктуаций показателя преломления n (const — положительное число, которое определяется выбором форм записи прямого и обратного преобразований Фурье). Под символами типа $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l}$ здесь и далее понимается реальное или формальное скалярное произведение элементов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$. Функция $\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{q};z)$ удовлетворяет равенству $\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{q};z)=\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(-\mathbf{q};z)$, которое использовано при выводе искомого интегро-функционального уравнения. Для получения единственного решения уравнения (2) необходимо задать граничные условия. Считаем, что $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)|_{z=0}$ известная функция. Это первое граничное условие. В силу конечности мощности излучения, проходящего через плоскость $z=0$, и отсутствия иных источников в пределах открытого полупространства V (т. е. $z>0$) функция $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ для любых $z\geq 0$ должна стремиться к нулю, если хотя бы одна из величин $|\boldsymbol{\rho}_1|,|\boldsymbol{\rho}_2|,|\boldsymbol{\rho}_1'|,|\boldsymbol{\rho}_2'|$ стремится к $+\infty$. Такое поведение функции $\Gamma_{22}(\rho_1,\rho_2,\rho_1',\rho_2';z)$ на бесконечности играет роль второго граничного условия. Далее эти условия использованы при получении интегро-функционального уравнения и точных аналитических представлений для интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности.

Процедура вывода искомых соотношений и уравнений. Преобразуем последовательно уравнение (2) с помощью двух замен переменных, которые родственны по форме двум стандартным заменам переменных, используемым в теории распространения лазерного излучения в турбулентной атмосфере [13]. Эти замены являются биективными и их можно записать в векторной форме:

$$\boldsymbol{\omega}_s=\boldsymbol{\rho}_s-\boldsymbol{\rho}_s',\quad \boldsymbol{\tau}_s=\boldsymbol{\rho}_s+\boldsymbol{\rho}_s',\ \ s\in\{1,2\};\ \ \mathbf{u}=\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}_2,\ \mathbf{p}=\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2. \quad (4)$$

После замен (4) и учета формулы (3) уравнение (2) примет вид:

$$\left[\frac{ik}{2}\frac{\partial}{\partial z}+\nabla_{\omega_1}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}+\nabla_{\omega_1}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}+\nabla_{\omega_2}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}-\nabla_{\omega_2}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}+\frac{ik^3}{16}F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u};z\right)\right]\Gamma_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p};z\right)=0, \quad (5)$$

где $\nabla_{\omega_1},\nabla_{\omega_2},\nabla_{\boldsymbol{u}},\nabla_{\boldsymbol{p}}$ — двумерные операторы Гамильтона, а функция $\Gamma_{22}^{\times}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{p};z)$ равна функции $\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z)$, в которой проведены замены:

$$\boldsymbol{\rho}_1=2^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_1+2^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{p})\right),\quad \boldsymbol{\rho}_2=2^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_2+2^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{u})\right), \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\rho}_1'=2^{-1}\left(2^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{p})-\boldsymbol{\omega}_1\right),\quad \boldsymbol{\rho}_2'=2^{-1}\left(2^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{u})-\boldsymbol{\omega}_2\right).$$

Функция $F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u};z\right)$ в (5) имеет вид:

$$F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u};\mathrm{z}\right)=8\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathit{\Phi}_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)[1+\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)-$$
$$-\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)\left(\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)+\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)\right)\Big]dq_1dq_2. \tag{7}$$

С учетом описанных выше граничных условий применим к уравнению (5) сначала двумерное преобразование Фурье по переменной $\mathbf{p}$ $\left(\mathbf{p}=(p_1,p_2)\right)$, а затем к полученному уравнению — двумерное преобразование Фурье по переменной $\mathbf{u}$ $\left(\mathbf{u}=(u_1,u_2)\right)$. В результате имеем:

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left(\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left(\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)\right]\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)+$$
$$+\frac{k^3}{32\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{u})}F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z\right)\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma};z\right)du_1du_2=0, \tag{8}$$

где $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma};z\right)=\left(2\pi\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})}\Gamma_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\boldsymbol{p};z\right)dp_1dp_2,$

$$\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)=\left(2\pi\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{u})}\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma};z\right)du_1du_2,\quad \boldsymbol{\gamma}=\left(\gamma_1,\gamma_2\right),\ \boldsymbol{\zeta}=\left(\zeta_1,\zeta_2\right).$$

Данное соотношение с помощью ряда действий, имеющих смысл процедур инвариантного погружения, разбиений [19, 20, 22—27] или биективных преобразований, можно привести к виду интегро-функционального уравнения. С этой целью разобьем функцию $F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z\right)$ на два слагаемых, которые содержат один произвольный скалярный параметр ξ и один произвольный вещественный двумерный вектор $\boldsymbol{\alpha}=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$. Имеет место равенство

$$F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z\right)=\varkappa_1\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;z;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)+\varkappa_2\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u};z;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right), \tag{9}$$

в котором $\varkappa_1\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;z;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)=8\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)\chi_1\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;\mathbf{q};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)dq_1dq_2,$

$$\varkappa_2\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)=8\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)\chi_2\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{q};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)dq_1dq_2,$$

$$\chi_1\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{q};\xi,\ \boldsymbol{\alpha}\right)=1+\xi\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right)\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)-\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)\times$$
$$\times\left(\xi\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right)+\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)\right),$$

$$\chi_2\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\mathbf{q};\xi,\ \boldsymbol{\alpha}\right)=\left(\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)-\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\right)\right)\times$$
$$\times\left(\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\right)\right)-\xi\cos\left(2^{-1}\left(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\right)\right).$$

Подставим в (8) вместо функции $F_{22}^{\times}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u};z\right)$ ее представление в виде правой части (9). Преобразуем полученное соотношение посредством использования формулы Эйлера, равенства $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(\mathbf{q};z\right)=\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(-\mathbf{q};z\right)$, четности косинуса, определений функций $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma};z\right)$, $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)$ и элементарных биективных замен переменных в трех двукратных интегралах, которые появляются в процессе приведения исходного соотношения (8) к удобной для дальнейших рассуждений форме. В результате получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\left[\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\left(\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\right)-\left(\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}_2}\right)+\frac{k^3}{16}\varkappa_1\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2;z;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]\times$$
$$\times\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)+2\pi k^3 g\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;\xi,\ \boldsymbol{\alpha}\right)=0, \tag{10}$$

$$g\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z;\xi,\ \boldsymbol{\alpha}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{\varepsilon}^{\circ}\left(2\left(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q}\right);z\right)[\cos\left(\left(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)-$$

$$-\cos\left(\left(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2\right)\right)\Big]\left[\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{q},\boldsymbol{\gamma};z\right)-\xi\cos\left(\left(\boldsymbol{\zeta}-\mathbf{q}\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};z\right)\right]dq_1dq_2.$$

Уравнение (10) можно упростить путем биективной замены переменных:

$$\tilde{z}=2k^{-1}z,\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1=\boldsymbol{\omega}_1+2k^{-1}z\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2=\boldsymbol{\omega}_2+2k^{-1}z\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right). \tag{11}$$

С учетом (11) уравнение (10) сводится к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}+\frac{k^3}{16}\varkappa_1\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right);\frac{k\tilde{z}}{2};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)\right]\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right),\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\frac{k\tilde{z}}{2}\right)+$$
$$+2\pi k^3 g(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right),\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\frac{k\tilde{z}}{2};\xi,\boldsymbol{\alpha})=0. \tag{12}$$

Последнее слагаемое в левой части (12) выражается при $\tilde{z}>0$ через неизвестную функцию $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\cdots)$, что следует из (10). Если предположить, что функция $g(\cdots)$ в уравнении (12) является известной величиной, то его формальное решение можно записать в виде

$$G\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\tilde{z}\right)=\exp\left(-f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\tilde{z};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)\right)[\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0\right)-$$
$$-2\pi k^3\int_0^{\tilde{z}}\exp\left(f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\tilde{z}';\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)\right)g\left(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\psi;\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)d\tilde{z}']. \tag{13}$$

$$\text{Здесь}\quad G\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\tilde{z}\right)=\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right),\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\frac{k\tilde{z}}{2}\right);$$

$$f\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};\tilde{z};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{k^3}{16}\int_0^{\tilde{z}}\varkappa_1\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}''\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\zeta}\right),\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}''\left(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\zeta}\right);\frac{k\tilde{z}''}{2};\xi,\boldsymbol{\alpha}\right)d\tilde{z}''.$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{z}'\left(\gamma+\boldsymbol{\zeta}\right),\quad \boldsymbol{\vartheta}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-\tilde{z}'\left(\gamma-\boldsymbol{\zeta}\right),\quad \psi=\frac{k\tilde{z}'}{2}.$$

При выводе (13) учтено, что функция $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\gamma};0)$ выражается непосредственно через функцию $\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';0)$, значения которой изначально считались известными. Уравнение (13) является искомым интегро-функциональным уравнением относительно неизвестной функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\cdots)$ и позволяет представить ее в виде суммы двух (или трех при $\xi\neq 0$) слагаемых, которые можно найти или оценить в некоторых случаях без его решения.

Точные аналитические представления. Из (10) следует, что второе слагаемое в квадратных скобках в (13) обращается в нуль для любых ξ и $\boldsymbol{\alpha}$, если верно любое из равенств

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-2\tilde{z}'\boldsymbol{\zeta}\right)=\pm\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2-2\tilde{z}'\boldsymbol{\gamma}\right),\quad \tilde{z}'\in[0,+\infty). \tag{14}$$

Если выбран знак “+” в (14), то должны выполняться равенства

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\gamma},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2=\mathbf{0}=\left(0,0\right),\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1=\mathbf{b}=\left(b_1,b_2\right), \tag{15}$$

где **b** — произвольный вектор, параллельный плоскости *OXY*. В свою очередь, если выбран знак “–”, то должны выполняться равенства

$$\boldsymbol{\zeta}=-\boldsymbol{\gamma},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1=\mathbf{0}=\left(0,0\right),\qquad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2=\mathbf{h}=\left(h_1,h_2\right), \tag{16}$$

где **h** — произвольный вектор, который, как и **b**, параллелен плоскости *OXY*. Отметим, что из равенств (4), (6), (11) следует непротиворечивость каждого из условий (15) и (16). Если выполнены соотношения (15), то аналитическое решение интегро-функционального уравнения (13) имеет вид:

$$\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{b},\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};z\right)=\beta\left(z,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{b}\right)\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{b}+4k^{-1}z\boldsymbol{\gamma},\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};0\right), \tag{17}$$

где $\beta\left(z,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{b}\right)=\exp\left(-k^2\int_0^z\varkappa_1^{\Delta}(\mathbf{b}+4k^{-1}\left(z-z''\right)\boldsymbol{\gamma};z''\right)dz''),$

$$\varkappa_1^{\Delta}\left(\boldsymbol{\delta};z''\right)=\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{\circ}{\Phi}_{\varepsilon}\left(\mathbf{q};z''\right)(1-\cos^2\left(2^{-1}\left(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{q}\right)\right)dq_1dq_2,\qquad \boldsymbol{\delta}=\left(\delta_1,\delta_2\right).$$

При получении (17) учтены соотношения (9), (11). Если выполнены соотношения (16), то аналитическое решение интегро-функционального уравнения (13) можно записать в виде

$$\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{0},\mathbf{h},-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};z\right)=\beta\left(z,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{h}\right)\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}\left(\mathbf{0},\mathbf{h}+4k^{-1}z\boldsymbol{\gamma},-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma};0\right). \tag{18}$$

Аналитические решения (17), (18) с учетом определений функции $\overline{\overline{\Gamma_{22}^{\times}}}(\cdots)$, векторов $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{u},\ \mathbf{p},\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$ и соотношений (15), (16) с помощью ряда элементарных биективных преобразований несложно привести к следующим равенствам:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}_1)}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2\ ;z\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}=\beta\left(z,4^{-1}\boldsymbol{\gamma},\mathbf{b}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}_1)}\Gamma_{22}\left(\cdots;0\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{h};z\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}=\beta\left(z,4^{-1}\boldsymbol{\gamma},\mathbf{h}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}\Gamma_{22}\left(\cdots;0\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}. \tag{20}$$

Интегрирование в (19), (20) выполняется по всему четырехмерному евклидову пространству E_4, элементами которого являются все вектор-строки вида $(\rho_{11},\rho_{12},\rho_{21},\rho_{22})$. При этом под символом $\Gamma_{22}(\cdots;0)$ в (19), (20) следует понимать функции

$$\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1+(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{\rho}_2\ ;0\right),$$

$$\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2+(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{h}\ ;0\right).$$

С точностью до множителя $(2\pi)^{-1}$ левые части соотношений (19) и (20) совпадают с двумерными преобразованиями Фурье от двукратных интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2\ ;z\right)d\rho_{21}d\rho_{22},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{h}\ ;z\right)d\rho_{11}d\rho_{12}.$$

Данные двукратные интегралы и усеченные Фурье-образы (19) и (20) являются интегральными характеристиками четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z)$. Отметим, что левые части равенств (19) и (20) при $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, $\mathbf{h}=\mathbf{0}$ имеют смысл усеченных спектральных характеристик пространственной корреляционной функции интенсивностей. Из (19) и (20) с помощью двумерного обратного преобразования Фурье получим аналитические представления для выписанных выше двукратных интегралов:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2;z\right)d\rho_{21}d\rho_{22}&=\left(4\pi^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i(\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_1'')))\beta\left(z,4^{-1}\boldsymbol{\gamma},\mathbf{b}\right)\times\\&\times\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1''+(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1''-(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2;0\right)d\gamma_1d\gamma_2d\rho_{11}''d\rho_{12}''d\rho_{21}d\rho_{22},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{h};z\right)d\rho_{11}d\rho_{12}&=\left(4\pi^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i(\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_2'')))\beta\left(z,4^{-1}\boldsymbol{\gamma},\mathbf{h}\right)\times\\&\times\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2''+(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2''-(2k)^{-1}z\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{h};0\right)d\gamma_1d\gamma_2d\rho_{11}d\rho_{12}d\rho_{21}''d\rho_{22}'',\end{aligned} \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\rho}_1''=\left(\rho_{11}'',\rho_{12}''\right)$, $\boldsymbol{\rho}_2''=\left(\rho_{21}'',\rho_{22}''\right)$.

Подчеркнем, что правые части всех точных аналитических представлений (19)—(22) выражаются через граничные значения четырехточечной функции когерентности на плоскости $z=0$ и функцию $\varkappa_1^{\Delta}\left(\boldsymbol{\delta};z''\right)$, которые изначально полагались известными. Наиболее простой вид (19) и (20) имеют при $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. В этом случае их можно записать как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2\ ;z\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}=\beta\left(z,\mathbf{0},\mathbf{b}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{b},\boldsymbol{\rho}_2\ ;0\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}, \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{h};z\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}=\beta\left(z,\mathbf{0},\mathbf{h}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{22}\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{h}\ ;0\right)d\rho_{11}\ldots d\rho_{22}. \tag{24}$$

Если **b** = **h** = **0**, то $\beta(z,\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1$ для любых $z \geq 0$ и правые части равенств (23), (24) являются константами, которые полностью определяются граничными значениями функции $\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2';z)|_{z=0}$. Поэтому левые части (23) и (24) для такого случая инвариантны по отношению к изменениям $z \in [0,+\infty)$. Для данной ситуации формулы (23), (24) несложно получить из выведенных ранее [18] соотношений (46.12)—(46.14). Однако если $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, то правые части соотношений (23), (24) не являются константами, а сами соотношения обобщают инвариант (46.15) из [18]. При этом функция $\beta(z,\mathbf{0},\boldsymbol{\delta})$, которая полностью описывает зависимости правых частей (23), (24) от переменной z имеет вид:

$$\beta(z,\mathbf{0},\boldsymbol{\delta}) = \exp[-\pi k^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\cos^2\left(2^{-1}(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\delta})\right)\right)dq_1 dq_2 \int_0^z \overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{q};z'')\,dz''], \tag{25}$$

где $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{b}$ или $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{h}$ ($|\delta| \neq 0$). Для спектра флуктуаций Кармана [13] (имеет место равенство $\overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\boldsymbol{\delta};z'') \equiv \overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(|\boldsymbol{\delta}|;z'')$) функция (25) стремится к нулю при $z \to +\infty$. Следовательно, интегральные характеристики четырехточечной функции когерентности, определенные левыми частями равенств (23) и (24), также стремятся к нулю при $z \to +\infty$. Кроме того, для данного случая функция $\beta(z,\mathbf{0},\boldsymbol{\delta})$ может быть записана в виде

$$\beta(z,\mathbf{0},\boldsymbol{\delta}) = \exp\left[-(\pi k)^2 \int_0^{+\infty}\left(1-\mathrm{J}_0(|\boldsymbol{\delta}|w)\right)\left(\int_0^z \overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(w;z'')\,dz''\right)w\,dw\right], \tag{26}$$

где $\mathrm{J}_0(\cdots)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Заключение. Полученные в явном виде общие точные аналитические представления для интегральных (в частности, спектральных) характеристик четырехточечной функции когерентности лазерного пучка излучения демонстрируют принципиальную возможность строгого и эффективного решения краевых задач для уравнения (2) для любого уровня флуктуаций показателя преломления турбулентной среды. Соотношения (19)—(24) указывают на заметное влияние исходных данных пучка лазерного излучения, а также типа зависимости интеграла $\int_0^z \overset{\circ}{\Phi}_\varepsilon(\boldsymbol{q};z'')\,dz''$ от переменной z и вектора $\boldsymbol{\delta}$ на изменения интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности при увеличении длины трассы z.

[1] **В. И. Татарский.** Распространение волн в турбулентной атмосфере, Москва, Наука (1967) 143—157

[2] **В. И. Татарский.** Изв. вузов. Радиофизика, **10**, № 12 (1967) 1762—1765

[3] **А. Исимару.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, Т. 2, Москва, Мир (1981) 100—102

[4] **Л. С. Долин.** Изв. вузов. Радиофизика, **7**, № 3 (1964) 559—562

[5] **А. В. Фалиц.** Опт. атм. океана, **28**, № 9 (2015) 763—771

[6] **A. E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M. P. J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A. F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi.** Adv. Opt. Photon., **7** (2015) 66—106

[7] **G. Gbur.** J. Opt. Soc. Am. A, **31**, № 9 (2014) 2038—2045

[8] **И. Г. Якушкин.** Изв. вузов. Радиофизика, **19**, № 3 (1976) 384—391

[9] **И. П. Лукин.** Опт. атм. океана, **31**, № 9 (2018) 685—697

[10] **В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский.** ЖЭТФ, **73**, № 2(8) (1977) 481—497

[11] **И. П. Лукин.** Опт. атм. океана, **30**, № 8 (2017) 672—681

[12] **В. А. Банах, Л. О. Герасимова, А. В. Фалиц.** Опт. атм. океана, **29**, № 5 (2016) 369—376

[13] Распространение лазерного пучка в атмосфере: Проблемы прикладной физики, под ред. Д. Стробена, Москва, Мир (1981) 84, 107, 112—114, 147—158, 175

[14] **Fei Wang, Xianlong Liu, Yangjian Cai.** Progr. Electromagn. Res., **150** (2015) 123—143

[15] **Z. C. Chen, P. Li, J. Pu Ding, D. Zhao.** Appl. Phys. B, **107**, N 2 (2012) 469—472

[16] **V. A. Banakh, I. N. Smalikho.** Opt. Express, **22**, N 19 (2014) 1—13

[17] **В. А. Банах, Л. О. Герасимова, И. Н. Смалихо.** Квант. электрон., **45**, № 3 (2015) 258—260

[18] **С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский.** Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Случайные поля, Москва, Наука (1978) 355, 367—369
[19] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **34**, № 2 (1981) 335—341; [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **34** (1981) 241—246]
[20] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **35**, № 6 (1981) 1044—1050 [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **35** (1981) 1354—1359
[21] **Н. Н. Роговцов.** Изв. АН СССР. Физ. атм. океана, **21**, № 10 (1985) 1111—1112
[22] **Н. Н. Роговцов.** Журн. прикл. спектр., **43**, № 1 (1985) 142—148 [**N. N. Rogovtsov.** J. Appl. Spectr., **43** (1985) 813—816]
[23] **Н. Н. Роговцов.** Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению проблем математической физики, ч.1, Минск, МО РБ, БГПА (1999) 283—374
[24] **Н. Н. Роговцов.** Дифф. уравнения, **44**, № 9 (2008) 1205—1221
[25] **N. N. Rogovtsov.** General Invariance Relations Reduction Method and Its Applications to Solutions of Radiative Transfer Problems for Turbid Media of Various Configurations, in “Light Scattering Reviews”, **5**, Ed. A. A. Kokhanovsky, Chichester, Springer-Praxis (2010) 243—327
[26] **Н. Н. Роговцов.** Дифф. уравнения, **51** (2015) 263—276; 650—662
[27] **N. N. Rogovtsov, F. Borovik.** J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf., **183** (2016) 128—153
[28] **N. N. Rogovtsov.** In: “Non-Stable Universe: Energetic Resources, Activity Phenomena, and Evolutionary Processes”, ASP Conf. Ser., **511**, Eds. A. M. Mickaelian, H. A. Harutyunian, E. H. Nikoghosyan, San Francisco, Astronomical Society of the Pacific (2017) 276—281