ТРЕХКРАТНАЯ БРЭГГОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Г. В. Кулак [1*], С. В. Кулаков [2], П. И. Ропот [3], О. В. Шакин [2]

УДК 534;535.42/.44

[1] Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, 247760, Мозырь, Беларусь; e-mail: g.kulak57@mail.ru
[2] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: oshakin@mail.ru
[3] Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь; e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by

(Поступила 16 января 2020)

Исследована неколлинеарная трехкратная акустооптическая дифракция бесселевых световых пучков на ультразвуке в одноосных кристаллах. Получено выражение для комплексной векторной амплитуды дифрагированной волны в векторно-матричной форме в условиях точного брэгговского синхронизма. Установлено, что при распространении бесселева светового пучка под малым углом к оптической оси кристалла дифрагированные световые пучки испытывают трехкратную брэгговскую дифракцию с различной эффективностью. При точном выполнении условий брэгговского синхронизма возможен случай дифракции, когда дифрагированные световые пучки имеют одинаковую интенсивность; в отсутствие брэгговского синхронизма такой особенности дифракции не наблюдается. При больших частотных отстройках брэгговского синхронизма интенсивность света в третьем дифракционном порядке значительно снижается, вплоть до нулевого значения.

Ключевые слова: *акустооптическое взаимодействие, одноосный кристалл, бесселев световой пучок, трехкратная брэгговская дифракция.*

The non-collinear three-fold acoustooptic diffraction of Bessel light beams by ultrasound in uniaxial crystals is investigated. An expression for the complex vector amplitude of a wave diffracted under conditions of exact Bragg synchronism is obtained in the vector-matrix form. It is established that when a Bessel light beam propagates at a small angle to the optical axis of the crystal, the diffracted light beams display three-fold Bragg diffraction with different efficiency. If the conditions of Bragg synchronism are exactly fulfilled, a diffraction case is possible when the diffracted light beams have the same intensity; in the absence of Bragg synchronism, this diffraction feature is not observed. With large frequency detuning of the Bragg synchronism, the light intensity in the third diffraction order is significantly reduced (up to zero).

Keywords: *acoustooptic interaction, uniaxial crystal, Bessel light beam, triple Bragg diffraction.*

Введение. Акустооптическая (АО) дифракция световых волн в плосковолновом приближении и гауссовых световых пучков хорошо изучена [1]. Рассмотрены особенности двукратной и трехкратной брэгговской АО-дифракции оптического излучения в одноосных кристаллах. В работе [2] с использованием матрично-векторных методов решения систем уравнений связанных волн изучены особенности брэгговской АО-дифракции в анизотропных гиротропных кристаллах [2]. В последнее время уделяется внимание особенностям АО-преобразования бесселевых световых пучков (БСП) в одноосных и кубических кристаллах, включая гиротропные [3—5]. В работе [5] исследованы осо-

---

THREE-STAGE BRAGG DIFFRACTION OF BESSEL LIGHT BEAMS BY ULTRASOUND IN UNIAXIAL CRYSTALS

G. V. Kulak [1*], S. V. Kulakov [2], P. I. Ropot [3], O. V. Shakin [2] (*[1] I. P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, 247760, Belarus; e-mail: g.kulak57@mail.ru; [2] Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia; e-mail: oshakin@mail.ru; [3] B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by*)

бенности АО-преобразования БСП в условиях коллинеарного распространения ультразвуковой волны и дифрагированных световых пучков. Двукратная брэгговская АО-дифракция БСП теоретически и экспериментально исследована в [6]. Показано, что при распространении БСП вдоль оптической оси кристалла дифрагированные световые пучки ±1-го порядка располагаются симметрично относительно падающего и имеют примерно одинаковую интенсивность; при падении БСП под углом Брэгга и вблизи оптической оси также наблюдается двукратная брэгговская дифракция, однако интенсивности дифрагированных пучков +1- и +2-го порядка значительно различаются.

Распределение энергии в поперечном сечении БСП имеет вид яркого центрального пятна, окруженного системой концентрических колец [7]. При этом интенсивность в кольцевых зонах уменьшается с увеличением радиальной координаты. Важными отличительными особенностями БСП по сравнению с традиционными гауссовыми пучками являются бездифракционность в заданной области пространства и способность самореконструкции волнового фронта за экраном [7]. Благодаря уникальным свойствам БСП находят широкое применение в различных устройствах современной фотоники, опто- и микроэлектроники, включая системы оптической локации и беспроводной лазерной связи. При этом АО-методы управления поляризационными и энергетическими характеристиками БСП с использованием кристаллов со сложной анизотропией (включая естественную анизотропию и гиротропию) наиболее актуальны и перспективны [3—6].

В настоящей работе с использованием метода интегралов перекрытия рассмотрена трехкратная АО-дифракция БСП при попутном распространении в одноосных кристаллах. При этом вследствие больших отклонений дифрагированных световых пучков от оптической оси гиротропия кристалла не учитывалась [6]. В качестве примера теоретически исследована двукратная АО-дифракция БСП в одноосных кристаллах парателлурита (TeO_2) на медленной сдвиговой УЗ-волне.

Результаты и их обсуждение. Для эффективного АО-преобразования необходимо, чтобы кроме обычного продольного фазового согласования выполнялись условия поперечного фазового согласования [5]. Такое согласование связано с тем, что БСП с различными углами конусности имеют различную пространственную структуру и различные интегралы перекрытия g_m дифрагированных пучков. Вычисление интегралов перекрытия позволяет найти их максимальные значения в условиях поперечного фазового синхронизма.

Рассмотрим геометрию АО-взаимодействия, при которой УЗ-волна распространяется в кристалле TeO_2 в направлении оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Ось падающего БСП расположена в плоскости XZ. При трехкратной брэгговской дифракции падающий БСП распространяется под углом φ_i к оптической оси и возникают три дифрагированных БСП: первый дифракционный порядок появляется в процессе рассеяния необыкновенной световой волны в обыкновенную (*e-o*-преобразование), второй возникает как результат изотропной дифракции (*o-o*-преобразование) и третий — в процессе рассеяния обыкновенной световой волны в необыкновенную (*o-e*-преобразование). Частота ультразвука f, при которой происходит трехкратная АО-дифракция, находится из соотношения [1]: $f = \upsilon\sqrt{2(n_i^2 - n_d^2)} / 2\lambda_0$, где υ — фазовая скорость УЗ-волны, $n_i(n_d)$ — показатель преломления падающей (дифрагированной) световой волны, λ_0 — длина световой волны в вакууме; угол падения света: $\sin\varphi_i = 3\sqrt{(n_i^2 - n_d^2) / 8n_i^2}$. Геометрия трехкратного АО-преобразования БСП при точном брэгговском синхронизме представлена на рис. 1.

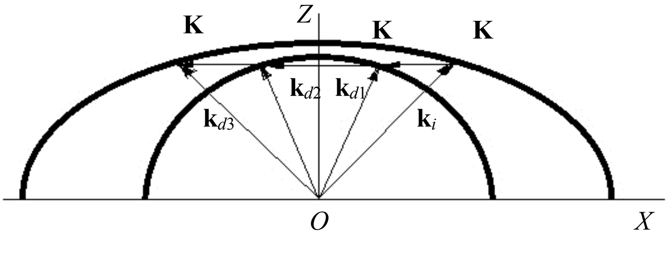

Рис. 1. Геометрия трехкратной брэгговской АО-дифракции БСП в одноосных кристаллах

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности E светового поля в области, занятой ультразвуком [7]. Решение волнового уравнения будем искать в виде суммы двух связанных эллиптически поляризованных волн (с учетом разложения дифрагированной волны по M цилиндрическим модам) с медленно изменяющимися амплитудами:

$$E = \mathbf{u}_i A_i(z) j_0(q\rho) e^{i[\mathbf{k}_i\mathbf{r}-\omega t]} + \sum_{m'=1}^{\mathrm{M}} \mathbf{u}_{d1m'} A_{d1m'}(z) j_0(q_{m'}\rho_1)\, e^{i[\mathbf{k}_{d1}\mathbf{r}-\omega_{d1}t]} +$$
$$+\sum_{m'=1}^{M} \mathbf{u}_{d2m'} A_{d2m'}(z) j_0(q_{m'}\rho_2)\, e^{i[\mathbf{k}_{d2}\mathbf{r}-\omega_{d2}t]} + \sum_{m'=1}^{M} \mathbf{u}_{d3m'} A_{d3m'}(z) j_0(q_{m'}\rho_3)\, e^{i[\mathbf{k}_{d3}\mathbf{r}-\omega_{d3}t]}, \tag{1}$$

где A_i — комплексная амплитуда преломленной волны; A_{d1m}, A_{d2m}, A_{d3m} — комплексные амплитуды дифрагированных волн; $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_{d1m}$, $\mathbf{u}_{d2m}$, $\mathbf{u}_{d3m}$ — единичные векторы эллиптической поляризации падающей и дифрагированной волн (при *o*-*e*-преобразовании i заменяют на o и d на e); $\omega_{d1} = \omega + \Omega$, $\omega_{d2} = \omega + 2\Omega$, $\omega_{d3} = \omega + 3\Omega$, где ω — частота падающей световой волны; $\rho_1 = \rho\cos\varphi_1$, $\rho_2 = \rho\cos\varphi_2$, $\rho_3 = \rho\cos\varphi_3$ (рис. 1), $\rho \| X$ — цилиндрическая координата светового пучка, распространяющегося вдоль оптической оси Z (углы дифракции по отношению к фронту УЗ-волны $\varphi_i,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 \ll 1$, поэтому $\rho_1\approx\rho_2\approx\rho_3\approx\rho$). В уравнении (1) введены нормированные функции Бесселя $j_0(q\rho)$ и $j_0(q_m\rho_{1,2,3})$ [3]:

$$j_0(q\rho) = J_0(q\rho)/\sqrt{\pi}R_B J_1(qR_B),\ \ j_0(q_m\rho_{1,2,3}) = J_0(q_m\rho_{1,2,3})/\sqrt{\pi}R_\mathrm{B} J_1(q_m R_\mathrm{B}), \tag{2}$$

где $J_{0,1}(x)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка; $q_0 = k_i\gamma$, $q_m = k_{dm}\gamma$; R_B — радиус падающего БСП; 2γ — угол конуса БСП; M — число бесселевых мод в дифрагированном световом поле. При $\rho_1 = R_\mathrm{B}$ и $q_m R_\mathrm{B} = (m - 0.25)\pi$ функции Бесселя обращаются в нуль, т. е. формула (1) представляет собой разложение дифрагированных волн (E_{d1m}, E_{d2m} и E_{d3m}) по модам цилиндрической области радиусом R_B.

Из решения волнового уравнения с учетом (1) следует, что амплитуды падающей A_i и дифрагированных волн A_{d1m}, A_{d2m} и A_{d3m} для геометрии АО-взаимодействия (рис. 1) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_i}{dz} &= -\chi_{e,o} g_0^1 A_{d1m} \exp(-i\Delta k_0 z),\\
\frac{dA_{d1m}}{dz} &= \chi_{o,e} g_1^0 A_i \exp(i\Delta k_0 z) - \chi_{o,o} g_1^2 A_{d2m} \exp(-i\Delta k_1 z)],\\
\frac{dA_{d2m}}{dz} &= \chi_{o,o} g_2^1 A_{d1m} \exp(i\Delta k_1 z) - \chi_{o,e} g_3^2 A_{d3m} \exp(-i\Delta k_2 z)],\\
\frac{dA_{d3m}}{dz} &= \chi_{o,e} g_2^3 A_{d2m} \exp(i\Delta k_2 z),
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$g_0^1 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_1) j_0(q\rho)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho)\rho d\rho},\ \ g_1^2 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_2) j_0(q_m\rho_1)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho_1)\rho d\rho},$$
$$g_1^0 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_1) j_0(q\rho)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho_1)\rho d\rho},\ \ g_2^1 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_2) j_0(q_m\rho_2)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho_2)\rho d\rho}, \tag{4}$$
$$g_3^2 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_2) j_0(q_m\rho_3)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho_2)\rho d\rho},\ \ g_2^3 = \frac{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0(q_m\rho_2) j_0(q_m\rho_3)\rho d\rho}{\int_0^{R_\mathrm{B}} j_0^2(q_m\rho_3)\rho d\rho}.$$

Решение систем уравнений (3) и (4) следует искать с учетом граничных условий: $A_i(z=0) = A, A_{d1m}(z=0) = A_{d2m}(z=0) = A_{d3m}(z=0) = 0$, где A — амплитуда падающего светового пучка. В условиях поперечного фазового синхронизма из совокупности M связанных волн цилиндрической области радиусом R_B эффективно взаимодействуют между собой лишь такие, для которых $q \approx q_m$ (условие поперечного фазового синхронизма). В этом случае из выражений (4), (6) следует $g_m \approx g_{1,0}^{0,1} \approx g_{3,2}^{2,3} \approx g_{2,1}^{1,2}$.

Решение системы уравнений связанных волн (3) при точном брэгговском синхронизме ($\Delta k_0 = 0$) несложно записать в векторно-матричной форме [2, 8]. Вектор-функция дифрагированной волны ($\mathbf{A}_d$) удовлетворяет уравнению:

$$d\mathbf{A}_d/dz = \hat{\mathrm{M}}\,\mathbf{A}_\mathrm{d}, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}_d = (A_i, A_{d1m}, A_{d2m}, A_{d3m})^\tau$; τ — операция транспонирования,

$$\hat{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_{oe}g_m & 0 & 0 \\ \chi_{oe}g_m & 0 & \chi_{oo}g_m & 0 \\ 0 & \chi_{oo}g_m & 0 & -\chi_{oe}g_m \\ 0 & 0 & \chi_{oe}g_m & 0 \end{pmatrix}.$$

С использованием формулы Сильвестра запишем решение системы уравнений (5):

$$\mathbf{A}_d = \left[\sum_{\kappa=1}^{4} e^{\lambda_\kappa} \frac{\prod\limits_{i\neq\kappa}(\hat{M}-\lambda_i\hat{I})}{\prod\limits_{i\neq\kappa}(\lambda_\kappa-\lambda_i)}\right]\mathbf{A}_i, \tag{6}$$

где $\mathbf{A}_i = (A_i, 0, 0, 0)^\tau$ — вектор начальных условий; $\hat{I}$ — единичная 4×4 матрица; λ_κ ($\kappa = 1, \ldots, 4$) — собственные значения матрицы $\hat{\mathrm{M}}$, причем

$$\lambda_{1,2} = \pm i g_m \sqrt{(\chi_{eo}^2 + \chi_{oo}^2/2) - \sqrt{(\chi_{eo}^2 + \chi_{oo}^2/2)^2 - \chi_{eo}^4}},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i g_m \sqrt{(\chi_{eo}^2 + \chi_{oo}^2/2) + \sqrt{(\chi_{eo}^2 + \chi_{oo}^2/2)^2 - \chi_{eo}^4}}.$$

Расчеты проводились с использованием систем уравнений (3) и (4) для геометрии трехкратной брэгговской дифракции БСП, распространяющихся под некоторым углом (рис. 1) к оптической оси одноосного кристалла TeO_2. Исследование систем дифференциальных уравнений осуществлялось численными методами для области $z \in [0; l]$, где l — длина АО-взаимодействия. Дифракция падающего БСП происходила на медленной сдвиговой УЗ-волне, распространяющейся с фазовой скоростью $v = 617$ м/с вдоль оси [110] и поляризованной вдоль оси $[\bar{1}10]$ кристалла TeO_2. Расчет тензора возмущений $\Delta\hat{\varepsilon}$ диэлектрической проницаемости TeO_2 осуществляется с использованием матрицы преобразования C, которая описывает поворот кристаллографических осей $X_1X_2X_3$ на угол 45° вокруг оси X_3 таким образом, что ось $X_1 \| [110]$ совпадает с осью акустического пучка. В результате выполнения сверток тензора $\Delta\hat{\varepsilon}$ с векторами поляризации падающего $\mathbf{u}_e$ и дифрагированного $\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_o)$ БСП для коэффициентов АО-модуляции получаем $\chi_{oe} = \chi_{eo} = (\mathbf{u}_e^*\Delta\hat{\varepsilon}\,\mathbf{u}_o), \chi_{oo} = (\mathbf{u}_o^*\Delta\hat{\varepsilon}\,\mathbf{u}_o)$ световой волны для геометрии АО-взаимодействия, представленной на рис. 1:

$$\chi_{oe} = \frac{\pi n_e^4\,(\tau_o\tau_e + \cos\phi_i)(p_{11} - p_{12})U_{12}}{2\lambda_0(n_o n_e)^{1/2}[(\tau_o^2+1)((\tau_e^2+1)]^{1/2}},$$

$$\chi_{oo} = \frac{\pi n_o^3\,(\tau_o^2 + \cos\phi_i)(p_{11} - p_{12})U_{12}}{4\lambda_0(\tau_o^2+1)},$$

причем компонента тензора деформаций $U_{12} = |\nabla_2 U| = |2I_a/\sigma\upsilon^3|^{1/2}$, U — компонента вектора смещений; I_a — интенсивность УЗ-волны; σ — плотность кристалла; λ_0 — длина световой волны в вакууме; p_{11}, p_{12} – фотоупругие постоянные; $\tau_o(\tau_e)$ — эллиптичность обыкновенной (необыкновенной) световой волны; n_o и n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла TeO_2. Целесообразно ввести выражения для относительных интенсивностей дифрагированных волн: $\eta_i = I_i/I$, $\eta_{d1,d2,d3} = I_{d1,d2,d3}/I$, где $I_i = A_iA_i^*$, $I_{d1,d2,d3} = A_{dm1,dm2,dm3}A_{dm1,dm2,dm3}^*$ — интенсивности преломленного и дифрагированного БСП при *o-e* (*e-o*), *o-o*-АО-преобразованиях соответственно, I — интенсивность падающего света.

На рис. 2 представлены зависимости относительных интенсивностей преломленной (η_i) и дифрагированных $\eta_{d1,d2,d3}$ световых волн от интенсивности УЗ-волны при наличии брэгговского синхронизма и в его отсутствие. При этом входящие в (3) и (5) расстройки фазового синхронизма Δk_0 и Δk_1 [1]: $\Delta k_0 \approx 3\pi f \lambda \Delta f / n_i \upsilon^2$, $\Delta k_1 \approx 3\Delta k_0, \Delta k_2 \approx -7\Delta k_0$, где Δf — отстройка от брэгговской частоты ультразвука f [1].

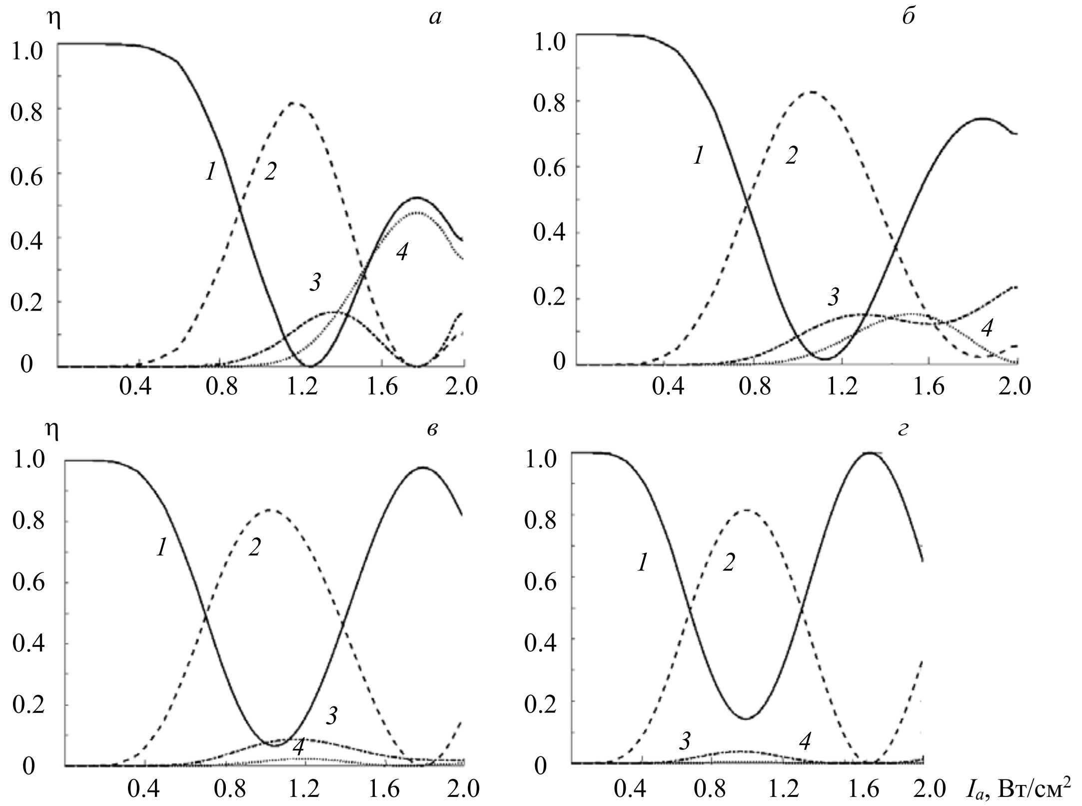

Рис. 2. Зависимости относительной интенсивности преломленной (η_l, кривая *1*) и дифрагированных БСП (η_{d1}, η_{d2} и η_{d3}, кривые *2*, *3* и *4* соответственно) от интенсивности I_a ультразвука для геометрии трехкратной АО-дифракции: $\Delta f = 0$ (*а*), 1 (*б*), 2 (*в*) и 3 МГц (*г*) (кристалл TeO_2; $\gamma = 2.4°$, $f = 30$ МГц, $R_B = 1$ мм, $\lambda_0 = 633$ нм, $l = 0.5$ см)

Для схемы трехкратного АО-преобразования БСП при точном брэгговском синхронизме ($\Delta f = 0$) характерно (в общем случае) отличие относительных интенсивностей для дифракционных порядков (η_{d1}, η_{d2}, η_{d3}). Равенство дифракционных эффективностей ($\eta_{d2} = \eta_{d3} = \eta_{d1} \approx 0.27$) при точном брэгговском синхронизме достигается при интенсивности ультразвука $I_a \approx 1.52$ Вт/см^2. В отсутствие брэгговского синхронизма ($\Delta f \neq 0$) в рассматриваемом диапазоне интенсивностей ультразвука $I_a \leq 2$ Вт/см^2 равенство дифракционных эффективностей (η_{d1}, η_{d2}, η_{d3}) не достигается (рис. 2, *б*).

Из рис. 2, *в*, *г* видно, что при достижении больших частотных отстроек брэгговского синхронизма второй и третий дифракционные порядки не достигают значительных величин. Например, при $\Delta f = 3$ МГц третий дифракционный порядок практически не возникает. Эффективность брэгговской дифракции в первом дифракционном порядке остается практически неизменной. Кроме кристалла TeO_2 для целей трехкратной брэгговской АО-дифракции БСП перспективно использовать и другие одноосные кристаллы. В ИК-диапазоне оптического спектра таковым является кристалл теллура [9], в котором эффективная АО-дифракция осуществляется на медленной сдвиговой УЗ-волне, распространяющейся вдоль оси [100]. При этом фазовая скорость УЗ-волны, распространяющейся вблизи оси [100] и поляризованной под углом $\theta = -63°$ к оси [001] (в плоскости *XZ*): $\upsilon_s = 1.01 \cdot 10^3$ м/с [10]. Для геометрии трехкратной АО-дифракции ИК-излучения в кристаллографической плоскости (010) кристалла Tl_3AsSe_3 на медленной сдвиговой УЗ-волне, распространяющейся вдоль оси [100], следует полагать $\upsilon_s = 10^3$ м/с [11].

Заключение. Исследована неколлинеарная трехкратная акустооптическая дифракция бесселевых световых пучков на ультразвуке в одноосных кристаллах. Получено выражение для комплексной векторной амплитуды дифрагированной волны в векторно-матричной форме в условиях точного брэгговского синхронизма. На примере кристалла парателлурита установлено, что при распространении бесселевых световых пучков под малым углом к оптической оси кристалла дифрагированные световые пучки испытывают трехкратную брэгговскую дифракцию с различной эффективностью. При точном выполнении условий брэгговского синхронизма возможен случай дифракции, когда дифрагированные световые пучки имеют одинаковую интенсивность, в отсутствие брэгговского синхронизма такой особенности дифракции не наблюдается. При значительных частотных отстройках брэгговского синхронизма интенсивность света в третьем дифракционном порядке значительно снижается, вплоть до нулевого значения. Полученные результаты найдут применение для создания акустооптических дефлекторов бесселевых световых пучков.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20Р-286) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-57-00004).

[1] **В. И. Балакший, В. Н. Парыгин, Л. Е. Чирков.** Физические основы акустооптики, Москва, Радио и связь (1985)
[2] **Г. В. Кулак.** Опт. и спектр., **63**, № 5 (1992) 957—959
[3] **Г. В. Кулак, Г. В. Крох, П. И. Ропот, О. В. Шакин.** Опт. и спектр., **121**, № 3 (2017) 103—109
[4] **V. N. Belyi, S. V. Kulakov, G. V. Kulak, O. V. Shakin.** XVIII Int. Conf. Young Res. “Wave Electronics and Its Applications in the Information and Telecommunication Systems”, Saint-Petersburg, 1—5 June 2015, State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg (2015) 39
[5] **V. N. Belyi, N. S. Kazak P. A. Khilo, E. S. Petrova, N. A. Khilo.** Univ. J. Phys. Appl., **9**, N 5 (2015) 220—224
[6] **В. Н. Белый, Г. В. Кулак, Г. В. Крох, П. И. Ропот, О. В. Шакин.** Журн. прикл. спектр., **85**, № 4 (2018) 673—678 [**V. N. Belyi, G. V. Kulak, G. V. Krokh, P. I. Ropot, O. V. Shakin.** J. Appl. Spectr., **85** (2018) 724—729]
[7] **R. M. Herman, T. A. Wiggins.** J. Opt. Soc. Am., **8**, N 6 (1991) 932—942
[8] **Г. Корн, Т. Корн.** Справочник по математике, Москва, Наука (1984)
[9] **Г. В. Кулак, Г. В. Крох, Т. В. Николаенко, П. И. Ропот.** Проблемы физики, математики и техники, № 4 (2014) 7—11
[10] **В. И. Балакший, В. Б. Волошинов, Г. А. Князев, Л. А. Кулакова.** ЖТФ, **78**, № 10 (2008) 87—95
[11] **J. D. Feichner, M. Gottlieb, J. J. Conroy.** Appl. Phys. Lett., **34**, N 1 (1979) 1—2