

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КАЧЕСТВА БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ**

А. А. Рыжевич^{1,2}, И. В. Балыкин^{1*}, Т. А. Железнякова²

УДК 621.315.592

¹ Институт физики НАН Беларуси,
Минск, Беларусь; e-mail: tol@dragon.bas-net.by

² Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

(Поступила 19 июля 2021)

Предложена методика оценки качества бесселевых световых пучков высших порядков (БСП_n, порядок $n > 0$) посредством анализа цифровых компьютерных изображений двумерных поперечных распределений интенсивности. Для оценки качества в конкретном поперечном сечении БСП_n достаточно одного изображения. Описаны алгоритмы, обеспечивающие корректное выполнение методики: алгоритм оценки положения оси кольцевого пучка на основе кластерного анализа, алгоритм оценки начального приближения параметра конусности при аппроксимации экспериментальных диаметральных распределений интенсивности квадратом функции Бесселя, основанный на анализе спектральной плотности мощности диаметрального распределения. Предложенная методика и алгоритмы реализованы в виде расширения для программного комплекса анализа качества БСП. С использованием программного комплекса методика экспериментально апробирована на примере анализа качества БСП₁, формируемого с помощью кристаллов КТР (KTiOPO₄) и KGW (KGd(WO₄)₂) из излучения полупроводникового лазерного модуля (ППЛМ) и гелий-неонового лазера (ЛГН). Показано, что пучок, формируемый из излучения ЛГН, сохраняет постоянство радиуса вдоль различных азимутальных направлений и соответствие формы идеальному БСП₁ на большем расстоянии от аксикона, чем ППЛМ, но при этом быстрее теряет постоянство интенсивности вдоль различных азимутальных направлений в первом кольце.

Ключевые слова: бесселев световой пучок, параметры качества световых пучков, анализ поперечных распределений интенсивности, алгоритмы обработки изображений.

A method is proposed to assess the quality of Bessel light beams of higher orders (BLB_n, order $n > 0$) by analyzing digital computer images of two-dimensional transverse intensity distributions. One image is sufficient to assess the quality in a specific cross-section of the BLB_n. Algorithms are described that ensure the correct implementation of this technique, namely, the algorithm for the annular beam axis position estimation based on cluster analysis, the algorithm of the estimation of the initial approximation of the cone parameter when approximating the experimental diametral intensity distributions by the square of the Bessel function based on the analysis of the spectral power density of diametral intensity distribution. The proposed

ESTIMATION OF THE QUALITY PARAMETERS OF BESSEL LIGHT BEAMS OF HIGHER ORDERS

A. A. Ryzhevich^{1,2}, I. V. Balykin^{1*}, T. A. Zheleznyakova² (¹ B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; e-mail: tol@dragon.bas-net.by; ² Belarusian State University, Minsk, Belarus)

** Доложено на международной школе-конференции молодых ученых и специалистов “Современные проблемы физики”, 13—15 июня 2018, Минск, Беларусь; XXIX международной научно-практической конференции аспирантов, магистрантов и студентов “Физика конденсированного состояния”, 22—23 апреля 2021 г., Гродно, Беларусь; конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Ф. И. Федорова, 25 июня 2021 г., Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.

method and algorithms are implemented as an extension for the software package for analyzing the quality of Bessel light beams. Using a software package, the technique was experimentally tested on the example of analyzing the quality of BLB₁ formed using KTP (KTiOPO₄) and KGW (KGd(WO₄)₂) crystals from the radiation of a semiconductor laser module (SCLM) and helium-neon laser (HNL). It is shown that the beam formed from the HNL retains the constancy of the radius along different azimuthal directions and conformity of the shape to the ideal BLB₁ at a larger distance from the axicon than the SCLM, but at the same time it loses the constancy of the intensity along different azimuthal directions in the first ring more quickly.

Keywords: Bessel light beam, quality parameters of light beams, analysis of transverse intensity distributions, image processing algorithms.

Введение. Бесселевы световые пучки (БСП) в теоретическом идеале являются аксиально симметричными световыми пучками, радиальное распределение поля в которых описывается функциями Бесселя 1-го рода [1]. Идеальные БСП имеют бесконечные поперечный размер и мощность, на практике такие световые поля нереализуемы. В связи с этим в описании экспериментально сформированных БСП, имеющих конечные размеры, может присутствовать также функция Гаусса, и тогда их называют бессель-гауссовыми [2].

В семействе БСП принято выделять БСП нулевого порядка (БСП₀) и высших порядков (БСП_{*n*}, *n* > 0). БСП₀ обладают узким осевым максимумом интенсивности, сохраняющим постоянный диаметр практически во всей зоне существования пучка. БСП_{*n*} характеризуются наличием винтовой дислокации волнового фронта (ВДВФ), из-за которой на оси пучка формируется минимум интенсивности, окруженный кольцевыми максимумами, диаметр которых сохраняется постоянным во всей области существования БСП_{*n*}. Эти качества определяют перспективность использования БСП для оптической диагностики, обработки материалов, связи.

Наиболее популярным из представленных в литературе способов характеристики качества БСП является применение к нему параметра M^2 [3–6], обычно используемого для гауссовых пучков и характеризующего качество пучка во всем диапазоне продольной координаты единственным числом. Несмотря на квазибездифракционность БСП в силу их конической природы, M^2 для них могут быть большими [4, 5], особенно при большом параметре конусности q_0 , что делает использование параметра M^2 неприемлемым. Для решения этой проблемы в [6, 7] предложен параметр качества Q для бездифракционных пучков, однако для его оценки необходимо анализировать не сам пучок, а его дифракцию на щели [8], что может создавать затруднения при анализе на практике, поскольку требует дополнительного вмешательства в оптическую схему. Следует отметить, что параметры M^2 и Q требуют выбора продольной плоскости, проходящей через ось пучка, для которой проводится оценка качества. В зависимости от выбора этой плоскости результаты оценки могут различаться. Таким образом, одно значение M^2 или Q не может охарактеризовать отклонение от осевой симметрии в поперечном распределении пучка. Еще одна особенность методики оценки параметров M^2 и Q — необходимость регистрации распределения интенсивности в нескольких плоскостях (сканирования), что не всегда представляется возможным. Можно отметить некоторые достаточно общие, неспецифические параметры, которые характеризуют качество световых пучков различных типов, в том числе БСП, и используются на практике — ширина пучка, отношение сигнал/шум и др. [9].

В практических приложениях имеет значение качество БСП в заданной области пространства, которая может как быть протяженной на несколько сантиметров, метров или даже километров, так и составлять всего несколько микрометров, что на практике соответствует одному конкретному поперечному сечению. Поэтому необходимо оценить не интегральное качество всего БСП с помощью параметра M^2 для гауссовых пучков [10, 11], а качество БСП в заданных поперечных сечениях. Кроме того, экспериментально получаемые БСП_{*n*} имеют ряд искажений в распределении интенсивности, которые затрудняют их применение, причем большинство таких искажений до сих пор не охарактеризованы численно. В настоящей работе разработана методика оценки качества БСП высших порядков с помощью объективных числовых параметров.

В работе [12] предложены объективные критерии для численной оценки качества БСП₀: коэффициент круглости, коэффициент постоянства, средний модифицированный коэффициент детерминации R^2 . Показано, что качество реальных БСП зависит от продольной координаты [13]. Поэтому с помощью предложенной методики исследована зависимость параметров качества от продольной координаты. В настоящей работе адаптированы предложенные в [12] шаги алгоритма оценки качества БСП₀ для анализа качества БСП_{*n*}.

Разработанная методика экспериментально протестирована при определении качества БСП₁, формируемых из излучения полупроводникового лазерного модуля (ППЛМ) и гелий-неонового лазера (ЛГН) с использованием кристаллов КТР (KTiOPO₄) и КGW (KGd(WO₄)₂) методом, предложенным в [14].

Параметры качества БСП_n. Для разработки методики определения качества БСП_n с помощью анализа цифрового изображения двумерного поперечного распределения (далее — поперечного распределения) интенсивности обобщены и адаптированы шаги алгоритма из методики определения качества БСП₀ в [12].

1.1. Оценка положения центра пучка.

1.2. Выборка набора диаметральных распределений с заданным шагом по азимутальному углу (рис. 1, а, б). Под диаметральной распределением интенсивности понимается одномерное распределение интенсивности вдоль прямой, проходящей через ось пучка в плоскости, перпендикулярной оси пучка (иногда именуется как поперечная плоскость или поперечная плоскость сечения).

1.3. Оценка начальных параметров аппроксимации для п. 1.5, следующего ниже, для расширенных радиальных распределений на основе диаметральных.

1.4. Усечение диаметральных распределений до расширенных радиальных, включающих в себя центральный максимум целиком (рис. 1, в) (необходимо для более корректной аппроксимации (п. 1.5) ближайшего к оси максимума интенсивности в автоматическом режиме).

1.5. Аппроксимация каждого из расширенных радиальных распределений квадратом функции Бесселя и оценка параметра масштаба b_i , а также качества аппроксимации вдоль каждого направления в виде коэффициента детерминации R_i^2 .

1.6. Оценка радиуса первого кольца на основе полученных параметров масштаба для каждого направления $r_{1,i}$, выборка соответствующих интенсивностей I_i .

1.7. Подсчет параметров качества БСП на основе полученных значений R_i^2 , $r_{1,i}$, I_i .

Для адаптации методики определения качества БСП₀ к пучкам высших порядков следует внести правки в шаги 1.1, 1.3, 1.4, 1.6, обусловленные наличием минимума в центре пучка, а также отличием расположения нулей и максимумов функции Бесселя различных порядков.

В предложенной ранее [15] версии алгоритма определения качества шаг 1.1 осуществляется с использованием метода подсчета координат энергетического центра масс (по формулам для расчета координат центра масс, где вместо масс фигурирует интенсивность в данном пикселе) распределения интенсивности без учета пикселей с интенсивностью ниже $0.8I_{\max}$, где $I_{\max}$ — максимальная интенсивность в поперечном распределении. Такой метод не требователен к вычислительным ресурсам, достаточно точен и может быть теоретически обоснован для гауссовых световых пучков. Однако в случае кольцевых световых полей, таких как БСП высших порядков, этот метод не дает удовлетворительных результатов, поскольку склонен размещать центр ближе к областям с высокой интенсивностью, и, если кольцо будет асимметрично по интенсивности, центр будет смещен в сторону более широкой или яркой части кольца. Это определяет необходимость разработки алгоритма для точной оценки положения центра кольцевого пучка.

Шаги 1.3, 1.4 требуют доработки с учетом специфических для каждого БСП_n положений первого нуля $\mu_{n,1}$ и первого максимума (нетривиального нуля производной $\mu'_{n,1}$), а также замены вида аппроксимирующей функции на функцию

$$\hat{I}(r) = aJ_n^2[b(r-c)], \quad (1)$$

где r — радиальная координата; J_n — функция Бесселя первого рода порядка n ; a , b , c — варьируемые параметры аппроксимации.

Внешний радиус центрального кольца (по нулевой интенсивности), используемый для построения расширенных радиальных распределений:

$$r_0 = \mu_{n,1}/b, \quad (2)$$

где $\mu_{n,1}$ — первый нуль функции Бесселя n -го порядка.

Тогда радиус первого кольцевого максимума интенсивности БСП (по максимальной интенсивности), используемый для выборки интенсивности в кольце и расчета коэффициентов качества (шаги 1.6 и 1.7):

$$r_1(\varphi) = \mu'_{n,1}/b(\varphi), \quad (3)$$

где $\mu'_{n,1}$ — координата первого нуля производной функции Бесселя n -го порядка.

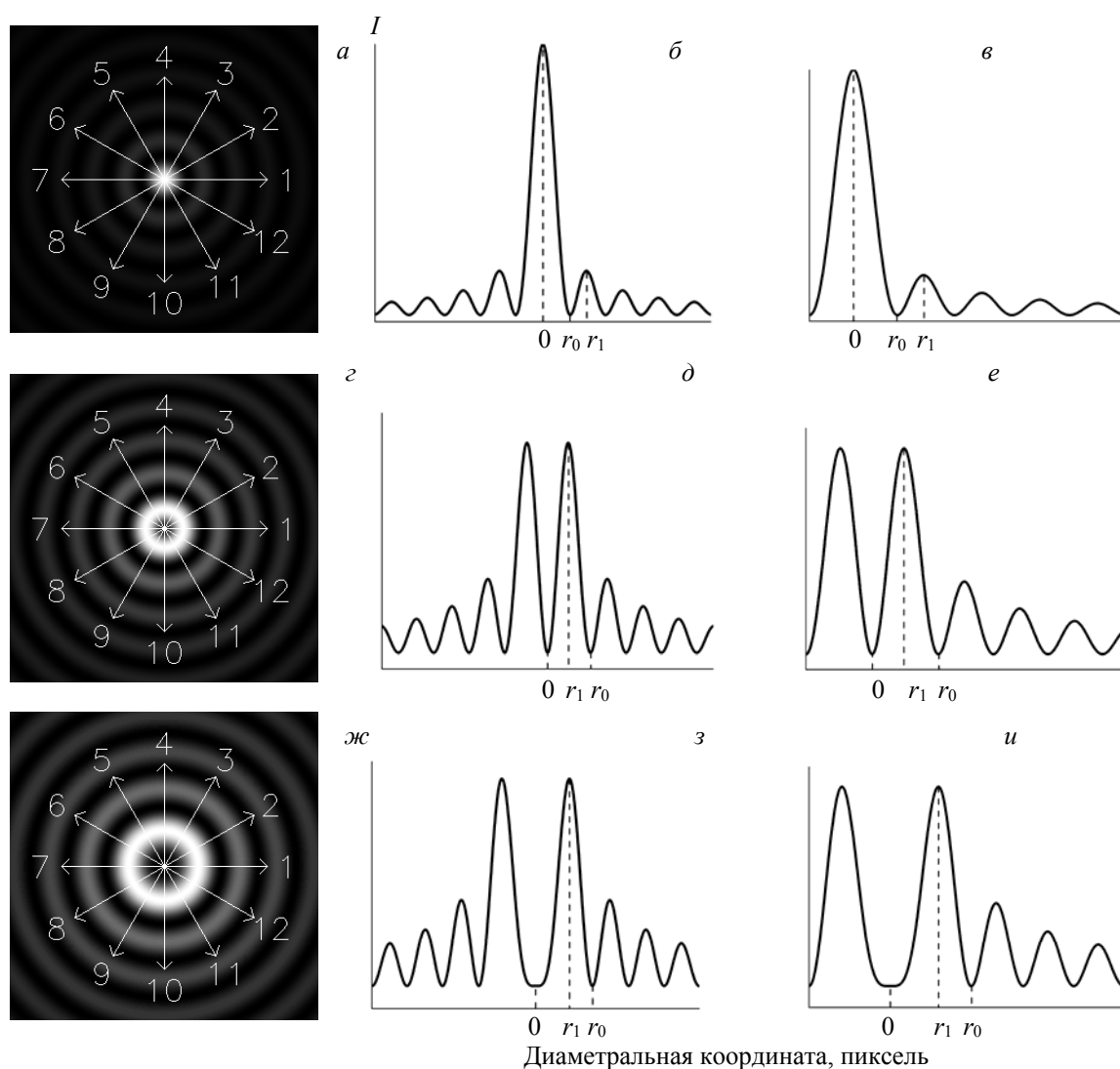


Рис. 1. Распределения интенсивности в БСП₀ (а—в), БСП₁ (z—е) и БСП₂ (жс—и): а, z, жс — двумерное поперечное распределение интенсивности пучка с указанием направлений, вдоль которых проводятся одномерные распределения; б, д, з — распределение интенсивности вдоль диаметра пучка; в, е, и — расширенное радиальное распределение интенсивности пучка

Значения параметров $\mu_{n,1}$ и $\mu'_{n,1}$ доступны в справочниках. Поскольку на практике нечасто встречаются пучки выше 3-го порядка, в табл. 1 приведены параметры для $n = 0, 1, 2, 3$.

Характерно, что в случае БСП₀ расширенное распределение включает в себя центральный максимум (рис. 1, в), БСП_n — центральное кольцо (рис. 1, е, и). Это необходимо для корректного определения параметра конусности b . В настоящей работе алгоритм оценки начального приближения для аппроксимации (шаг 1.3) улучшен с учетом информации о связи верхней границы спектра диаметального распределения интенсивности БСП с параметром b . Это улучшение необходимо как для

Т а б л и ц а 1. Нули функции и производной функции Бесселя первого рода различных порядков

Порядок n	0	1	2	3
$\mu_{n,1}$	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802
$\mu'_{n,1}$	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012

уменьшения числа итераций при поиске оптимальной аппроксимации, так и для обеспечения устойчивости алгоритма. Опыт показывает, что аппроксимация экспериментальных, сильно зашумленных диаметральных распределений интенсивности квадратом функции Бесселя с $n \geq 1$ чувствительна к выбору начального значения b и алгоритм может вообще не сойтись или сойтись только к локально оптимальной аппроксимации.

Формулы для непосредственного подсчета параметров качества сохраняют вид, приведенный в [12]. Азимутальный угол, определяющий направления расширенных радиальных распределений:

$$\varphi_i = i\Delta\varphi, \quad (4)$$

где $\Delta\varphi$ — угол между соседними направлениями, вдоль которых проводилась аппроксимация, $i = 0, 1, \dots, 2\pi/\Delta\varphi - 1$.

Коэффициент круглости k_K^Δ по модулю среднего отклонения от среднего радиуса 1-го максимума:

$$k_K^\Delta = 1 - M \left[\frac{|r_1 - M[r_1]|}{M[r_1]} \right]. \quad (5)$$

Здесь и далее $M[\dots]$ — усреднение по φ_i (по ансамблю распределений).

Коэффициент круглости k_K^σ по девиации:

$$k_K^\sigma = 1 - \frac{\sigma(r_1)}{M[r_1]}, \quad (6)$$

где $\sigma(r_1)$ — несмещенная оценка среднеквадратичного отклонения координаты первого кольцевого максимума:

$$\sigma(r_1) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_{1,i} - M[r_1])^2}, \quad (7)$$

$r_{1,i}$ — радиус кольцевого максимума вдоль направления, соответствующего φ_i .

Коэффициент постоянства первого кольцевого максимума k_n^Δ по отклонению модуля от средней пиковой интенсивности:

$$k_n^\Delta = 1 - M \left[\frac{|I_H(r_1) - M[I_H(r_1)]|}{M[I_H(r_1)]} \right], \quad (8)$$

где $I_H(r_1)$ — нормированная на осевой максимум пиковая интенсивность первого кольцевого максимума поперечного распределения экспериментального БСП вдоль некоторого радиального луча.

Коэффициент постоянства первого максимума k_n^σ по девиации:

$$k_n^\sigma = 1 - \frac{\sigma(I_H(r_1))}{M[I_H(r_1)]}, \quad (9)$$

где $\sigma(I_H(r_1))$ — несмещенная оценка среднеквадратичного отклонения пиковой интенсивности первого кольцевого максимума:

$$\sigma(I_H(r_1)) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I_{Hi}(r_{1,i}) - M[I_H(r_1)])^2}, \quad (10)$$

$I_{Hi}(r_{1,i})$ — нормированная на осевой максимум пиковая интенсивность первого кольцевого максимума поперечного распределения экспериментального БСП вдоль i -го луча (направление, определяемое φ_i).

Применительно к идеальным БСП, для которых $r_1, I_H(r_1) = \text{const}$, коэффициенты $k_K^\Delta, k_K^\sigma, k_n^\Delta, k_n^\sigma$ равны единице.

Параметр R_{cp}^2 характеризует качество поперечного распределения в целом:

$$R_{cp}^2 = M[R^2]. \quad (11)$$

Оценка положения оси БСП_n. Разработанный метод определения положения оси экспериментального БСП_n (используемый в качестве примера неидеальный кольцевой пучок показан на рис. 2, а) состоит из следующих этапов [16], продемонстрированных на примере анализа БСП₂, формируемого методом, описанным в [17].

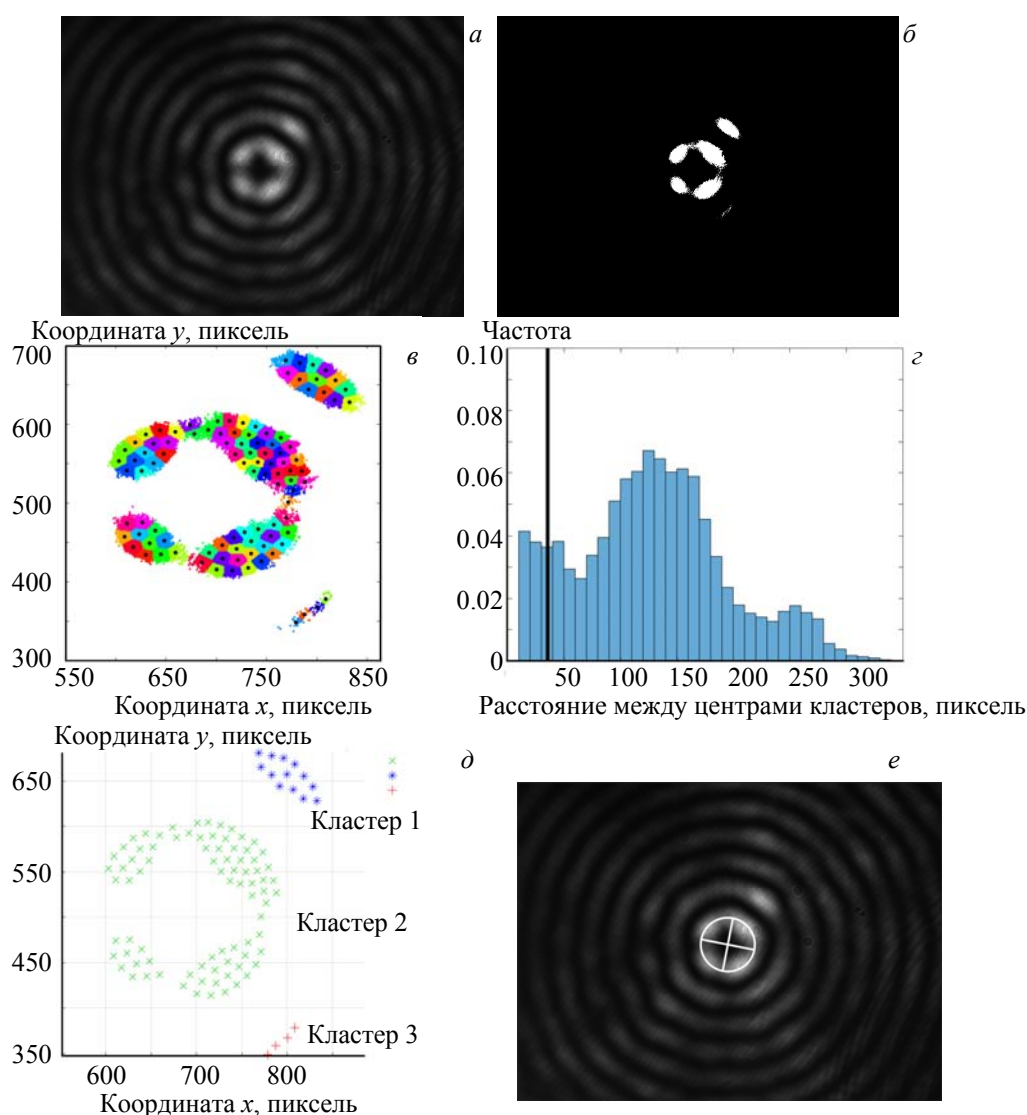


Рис. 2. Этапы алгоритма определения центра кольцевого пучка при анализе БСП₂: *а* — исходное двумерное поперечное распределение интенсивности, *б* — бинарное двумерное поперечное распределение интенсивности, *в* — результат применения первичной кластеризации к бинарному изображению, *г* — гистограмма расстояний между первичными кластерами, *д* — результат кластеризации DBSCAN, *е* — аппроксимация кластера эллипсом

2.1. Бинаризация изображения поперечного распределения по порогу.

Для выделения пикселей, относящихся к максимумам двумерного распределения интенсивности, а следовательно, обладающих наибольшей интенсивностью, используется процедура бинаризации изображения. Переход от исходного изображения к бинарному осуществляется с использованием преобразования вида

$$I_{ij}^* = \begin{cases} 1, & I_{ij} \geq \theta \\ 0, & I_{ij} < \theta \end{cases},$$

где I_{ij} — интенсивность пикселя в i -й строке и j -м столбце исходного изображения; I_{ij}^* — интенсивность пикселя в i -й строке и j -м столбце преобразованного изображения; θ — порог интенсивности. Пример выполнения бинаризации с порогом $\theta = 0.4I_{\max}$ приведен на рис. 2, *б*.

2.2. Получение координат ненулевых пикселей (далее — точки).

Из бинарного изображения строится таблица координат ненулевых пикселей (табл. 2), которая используется для дальнейшего анализа.

Т а б л и ц а 2. Координаты ненулевых пикселей

i	X	Y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
...	...	...
N	x_N	y_N

2.3. Первичная кластеризация по методу k -средних для уменьшения числа точек.

Для сокращения объема выборки используется промежуточная первичная кластеризация по методу k -средних [18], суть которого состоит в минимизации суммарного квадратичного отклонения точек кластеров от центров этих кластеров. В качестве объектов кластеризации использовались ненулевые пиксели, полученные в п. 2.2, в качестве признаков объектов естественным образом выступали их координаты. Метрика пространства признаков — евклидова. Пример выполнения первичной кластеризации с числом кластеров $k = 100$ приведен на рис. 2, в. Разными оттенками обозначены точки, принадлежащие различным кластерам, точками обозначены центры масс кластеров.

2.4. Формирование кольцевых кластеров по центрам первичных кластеров с использованием алгоритма DBSCAN. Центры определяются по методу среднего [mean].

Поскольку двумерное поперечное распределение интенсивности имеет форму кольца, необходимо применение более сложных алгоритмов кластеризации, отличных от k -средних. Один из наиболее популярных в подобных задачах — DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) — алгоритм пространственной кластеризации в присутствии шума, основанный на критерии плотности [19]. Суть алгоритма состоит в группировании плотно расположенных объектов (объектов с наибольшим количеством ближайших соседей) и отбросе объектов, лежащих в областях с малой плотностью (объектов, для которых ближайшие соседи достаточно далеки). В качестве параметров используются две величины: порог ε , определяющий минимальное расстояние между точками, необходимое для подтверждения их соседства, и minPts — минимальное число соседей, необходимое для того, чтобы считать объект опорным (core point) кластера. Для определения этих параметров необходимо использовать эвристики, основанные на структуре исходных данных. Параметр minPts устанавливается равным трем (минимальное возможное значение, имеющее смысл, поскольку шум в исходных данных фактически отсутствует). Порог ε определяется как 10-перцентиль (величина, отделяющая 10 % наименьших значений) распределения расстояний между центрами первичных кластеров. Опыт показывает, что такая эвристика позволяет в большинстве случаев избежать объединения центрального и внешнего колец в один кластер. Гистограмма расстояний между центрами первичных кластеров и соответствующий 10-перцентиль (изображен жирной вертикальной чертой) представлены на рис. 2, г, конечный результат кластеризации центров первичных кластеров методом DBSCAN — на рис. 2, д.

2.5. Выбор наибольшего кластера из полученных в п. 2.4 и его агрегация с кластерами, превышающими по численности объектов половину его объема.

В случае, если центральное кольцо сильно неоднородно по интенсивности, использование метода DBSCAN иногда приводит к его сегментации (формированию из первичных кластеров набора не-кольцевых кластеров, лежащих по кольцу) и, как следствие, неверному определению положения оси пучка. Для исключения этого эффекта используется процедура агрегации сегментных кластеров в кольцевой. Суть процедуры состоит в объединении кластеров, численность объектов в которых превышает половину наибольшего сегментного кластера. Дальнейшие процедуры проводятся над полученным укрупненным кластером.

2.6. Построение для точек из п. 2.5 аппроксимирующего эллипса.

Для построения аппроксимирующего эллипса используется функция MATLAB fit_ellipse [20]. Аппроксимация проводится по методу наименьших квадратов. Результатом аппроксимации служит набор параметров, характеризующих положение и форму эллипса. В качестве оценки положения оси пучка используется центр аппроксимирующего эллипса (рис. 2, е) [16].

Оценка параметра конусности БСП_н посредством анализа спектральной плотности мощности диаметральных распределений. Оценить параметр конусности при формировании БСП можно с помощью добавления в оптическую схему положительной линзы и последующей регистра-

ции Фурье-спектра поля в ее задней фокальной плотности. Спектр поля БСП представляет собой кольцо, радиус которого пропорционален параметру конусности. Такая методика требует внесения изменений в оптическую схему экспериментальной установки, что не всегда удобно, даже если экспериментальная установка в данный момент доступна для работы. Иногда требуется оценить качество БСП по распределению интенсивности в конкретном поперечном сечении. Поэтому представляет интерес определение параметра конусности на основе уже зарегистрированных единичных диаметральных распределений интенсивности БСП. Для анализа структуры спектра такого распределения теоретически исследованы функции, описывающие диаметрально распределение интенсивности идеальных БСП целых порядков:

$$I(x) = J_m^2(q_0 x), \quad (12)$$

где J_m — функция Бесселя 1-го рода m -го порядка; m — целое число; $q_0 = k_0 \sin \gamma_0$ — действительное число, параметр конусности БСП; k_0 — волновое число; γ_0 — угол конусности БСП (половинный угол раствора конуса волновых векторов); x — радиальная координата.

Рассмотрим идеальный бесконечный в пространстве БСП целого порядка. В таком случае спектр Фурье для интенсивности имеет вид:

$$F(q) = F[J_m^2(q_0 x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) e^{iqx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) (\cos qx + j \sin qx) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \rightarrow J_m(-x) = (-1)^m J_m(x) \\ J_m^2(-q_0 x) \sin(-qx) = (-1)^{2m} J_m^2(q_0 x) (-\sin qx) = -J_m^2(q_0 x) \sin qx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \sin qx dx = 0 \\ J_m^2(-q_0 x) \cos(-qx) = (-1)^{2m} J_m^2(q_0 x) \cos qx = J_m^2(q_0 x) \cos qx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx = 2 \int_0^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx = \left[m \in \mathbb{Z} \rightarrow J_{-m}(q_0 x) = (-1)^m J_m(q_0 x) \right] = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} J_{-m}(q_0 x) J_m(q_0 x) \cos qx dx.$$

В работе [21] приводится тождество для интеграла, входящего в полученное выражение:

$$\int_0^{+\infty} \cos ax J_{-\nu}(cx) J_{\nu}(cx) dx = \delta \frac{1}{2c} P_{\nu-1/2} \left(\frac{a^2}{2c^2} - 1 \right),$$

где $\delta = \begin{cases} 1, 0 < a < 2c \\ 0, 0 < 2c < a \end{cases}$, $P_{\nu-1/2}$ — полином Лежандра $(\nu - 1/2)$ -го порядка.

В силу того что $\cos((-a)x) = \cos(ax)$, весь интеграл должен быть четной функцией по a , таким образом, δ можно заменить на функцию Хэвисайда вида $\theta((2c)^2 - a^2)$.

Подставляя вместо δ функцию Хэвисайда и введенные ранее обозначения, получаем

$$F(q) = F[J_m^2(q_0 x)] = (-1)^m \frac{1}{q_0 \sqrt{2\pi}} P_{m-1/2} \left(\frac{q^2}{2q_0^2} - 1 \right) \theta((2q_0)^2 - q^2). \quad (13)$$

В соответствии с [22] полином Лежандра можно представить в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$$P_n(x) = {}_2F_1 \left(-n, n+1; 1; \frac{(1-x)}{2} \right),$$

тогда

$$P_{m-1/2} \left(\frac{q^2}{2q_0^2} - 1 \right) = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2} \right).$$

Допустима следующая форма для выражения (13):

$$F(q) = F[J_m^2(q_0 x)] = (-1)^m \frac{1}{q_0 \sqrt{2\pi}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2} \right) \theta((2q_0)^2 - q^2), \quad (14)$$

где q — волновое число, ${}_2F_1(f; b; c; z)$ — гипергеометрический ряд с коэффициентами 2 и 1 [22].

Квадрат модуля выражений (13) и (14) описывает спектральную плотность мощности (СПМ) $P(q)$ диаметального распределения идеального БСП и приводится в виде

$$P(q) = |F(q)|^2 = |F[J_m^2(q_0 x)]|^2 = \frac{1}{2\pi q_0^2} P_{m-1/2}^2 \left(\frac{q^2}{2q_0^2} - 1 \right) \theta((2q_0)^2 - q^2), \quad (15)$$

$$P(q) = \frac{1}{2\pi q_0^2} {}_2F_1^2 \left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2} \right) \theta((2q_0)^2 - q^2). \quad (16)$$

Примеры СПМ идеальных БСП, описываемые (15) и (16), показаны на рис. 3.

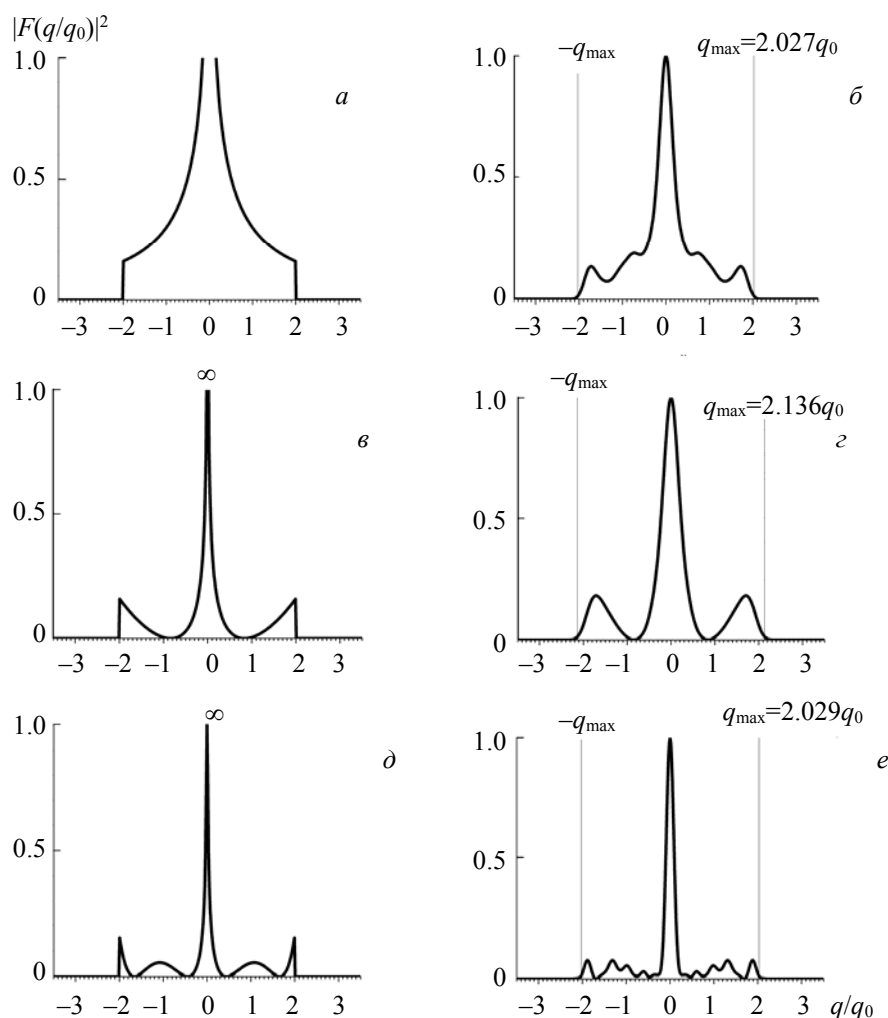


Рис. 3. Идеальные (а, в, д) и экспериментальные (б, г, е) спектры диаметральных распределений интенсивности БСП₀ (а, б), БСП₁ (в, г) и БСП₂ (д, е)

Ограниченность спектра квадрата функции Бесселя, вытекающая из наличия в выражении для спектра сомножителя в виде функции Хэвисайда $\theta((2q_0)^2 - q^2)$, позволяет построить метод быстрого определения параметра конусности q_0 на основе оценок СПМ экспериментальных распределений интенсивности БСП. Идея метода состоит в следующем: по экспериментальному диаметальному распределению интенсивности БСП строится оценка СПМ с использованием дискретного преобразования Фурье, затем СПМ нормируется на максимальное значение и проводится оценка верхней частоты спектра $q_{\max}$ с использованием порогового критерия $q_{\max} = \max_{q_i} \left\{ q_i : P(q_i) > \theta \max_{q_i} P(q) \right\}$,

т. е. это максимальная частота отсчета СПМ q_i , для которой справедливо, что значение СПМ в этом отсчете $P(q_i)$ больше максимального значения СПМ $\max P(q)$, умноженного на порог $\theta < 1$.

Кроме порогового критерия непосредственно к СПМ можно применять критерий на основе анализа производной СПМ по волновому числу (частоте). Суть его состоит в том, что граница спектра определяется как место перехода графика на близкое к нулю горизонтальное плато. Для получения координаты этого места следует проанализировать производную сглаженной СПМ: волновое число, для которого производная стабильно станет равной нулю, можно считать началом плато, обозначим его $q_{\max}$. Таким образом, алгоритм получения $q_{\max}$ можно записать в следующем виде.

3.1. Получение оценки СПМ на основе дискретного преобразования Фурье диаметального распределения интенсивности.

3.2. Сглаживание оценки СПМ с помощью фильтра (например, фильтра Савицкого–Голея или Гаусса).

3.3. Применение разностного оператора для получения оценки производной СПМ, в простейшем случае

$$\frac{dP}{dq}(q_i) = \frac{P(q_{i+1}) - P(q_i)}{q_{i+1} - q_i}.$$

3.4. Поиск значения $q_{\max}$, для которого все дальнейшие значения производной dp/dq меньше заданного малого числа κ .

На основании полученного значения $q_{\max}$ легко получить оценку $\hat{q}_0$ параметра q_0 из уравнения $(2\hat{q}_0)^2 - q_{\max}^2 = 0$:

$$\hat{q}_0 = q_{\max}/2. \quad (17)$$

Выражение (15) для СПМ диаметального распределения интенсивности справедливо лишь для идеального БСП, поскольку пределы интегрирования бесконечны, а само диаметральное распределение интенсивности описывается квадратом функции Бесселя, которая не является квадратично интегрируемой в бесконечных пределах, что приводит к стремлению СПМ к бесконечности при $q \rightarrow 0$.

Очевидно, что регистрируемое чувствительным сенсором распределение интенсивности имеет конечную длину и в соответствии с теорией преобразования Фурье бесконечный спектр. Следует отметить, что на практике часто встречаются бessel-гауссовы световые пучки, содержащие поперечную модуляцию интенсивности функцией Гаусса. Обе ситуации можно рассматривать как умножение исходной функции, описывающей диаметральное распределение, на “окно” (оконую функцию), описывающее модуляцию. Для рассмотрения ограниченного в пространстве диаметального распределения следует брать прямоугольное окно, для бessel-гауссова пучка — гауссово.

В соответствии с теоремой о свертке преобразование Фурье произведения функций тождественно свертке преобразований этих функций. Таким образом, ограниченность диаметального распределения приведет к свертке спектра с функцией вида $\sin(x)/x$, а промодулированность функцией Гаусса — с функцией вида $\exp(-x^2)$. Очевидно, такая свертка приведет к смещению границы спектра, определяемой по какому-либо уровню в сторону больших q , но при разумной длине окна следует ожидать, что форма спектра и его “ограниченность” сохранятся. Поскольку предлагаемая оценка рассматривается как начальное приближение для более точной аппроксимации, ее смещение в большую сторону не всегда является критическим недостатком и может компенсироваться скоростью ее получения в некоторых практических приложениях.

Для пучков высших порядков на границе спектра наблюдается максимум, который можно также использовать для оценки. Такая оценка может оказаться более точной, однако она имеет два недостатка: во-первых, она неуместна для пучка нулевого порядка, поскольку в нем максимум на границе отсутствует; во-вторых, поиск максимума требует более сложной статистической процедуры, чем просто отсечение границы спектра по заданному уровню, что может сказаться на скорости получения оценки при анализе световых пучков в режиме реального времени.

Таким образом, предложена методика для оценки параметра конусности q_0 , которая может быть использована при анализе экспериментальных БСП в режиме реального времени, например, при юстировке оптической схемы или при анализе качества БСП [13].

Примеры экспериментальных поперечных и диаметальных распределений интенсивности для БСП различных порядков приведены на рис. 4. Экспериментальные оценки СПМ диаметальных распределений, полученные на основе дискретного преобразования Фурье, а также теоретические СПМ, задаваемые выражениями (15) и (16), представлены на рис. 3. Для того чтобы пронормировать

волновое число q в столбце с экспериментальными СПМ, экспериментальное диаметрально распределение интенсивности аппроксимировано функцией вида (1). В результате аппроксимации получена оценка параметра b , имеющего смысл q_0 . На полученное значение b нормирована частотная шкала экспериментального СПМ. Полученная аппроксимация приведена на рис. 4 с экспериментальными диаметрными распределениями. Оценки $q_{\max}$, полученные на основе порогового критерия с $\theta = 0.01$, обозначены вертикальными линиями. Как видно, они лежат в области значений по оси абсцисс $q/q_0 = 2$, что соответствует выражению (17), указывающему на то, что граница спектра задается как $q_{\max} = 2q_0$. Также видно, что экспериментальные СПМ по структуре схожи с теоретическими, но обладают осцилляциями, предполагаемой причиной возникновения которых является отклонение формы диаметрального распределения от идеального и его ограниченность в пространстве.

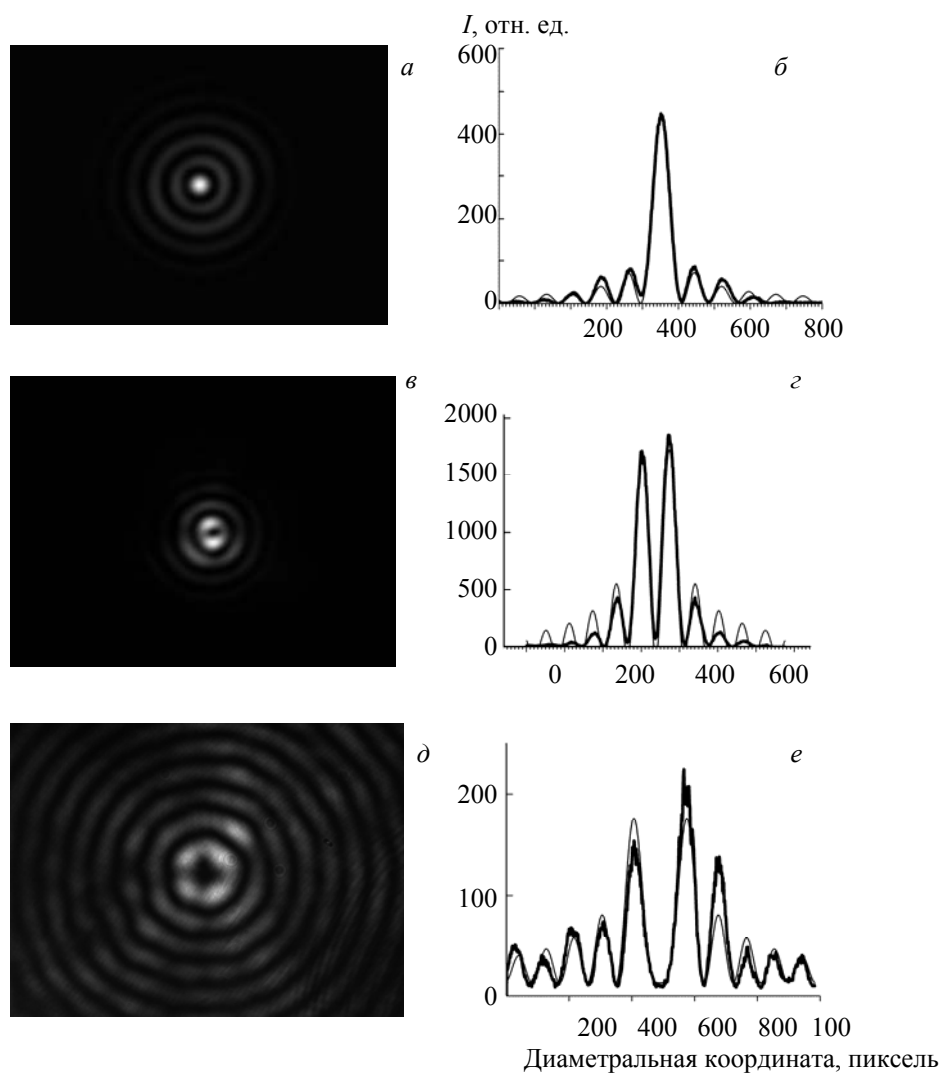


Рис. 4. Экспериментальные двумерные поперечные и диаметрально распределения интенсивности БСП₀ (а, б), БСП₁ (в, з) и БСП₂ (д, е)

Компьютерная программа для оценки качества БСП_н. Для применения разработанного метода в научной практике доработана компьютерная программа с графическим пользовательским интерфейсом в среде Matlab, реализующая все описанные выше алгоритмы [23] и позволяющая проводить анализ качества не только БСП₀, но и БСП₁, а также БСП₂. Также в новой версии программы добавлена возможность работы с серией изображений для упрощения анализа зависимости параметров качества от продольной координаты.

Программа позволяет загружать в нее поперечные распределения интенсивности в виде одного или нескольких цифровых компьютерных изображений (поддерживаются форматы tif, bmp, png, jpg, psx) и проводить анализ качества зарегистрированных на них БСП_n (порядок $n = 0, 1, 2$ указывается пользователем, автоматическое определение мы посчитали нецелесообразным) в полностью автоматическом режиме или с ручным выбором центра пучка по желанию пользователя. При обработке серии изображений, зарегистрированных в некотором диапазоне значений продольной координаты, для каждого изображения программой формируется папка, содержащая текстовые файлы с промежуточными и конечными результатами анализа и соответствующие им графики.

В качестве результатов анализа пользователю предлагаются численные оценки параметров качества в виде таблицы, а также графики и текстовые файлы, содержащие информацию о промежуточных этапах подсчета: расширенные радиальные распределения, зависимости r_1 , I_1 от азимутальной координаты. Окно интерфейса программы приведено на рис. 5.

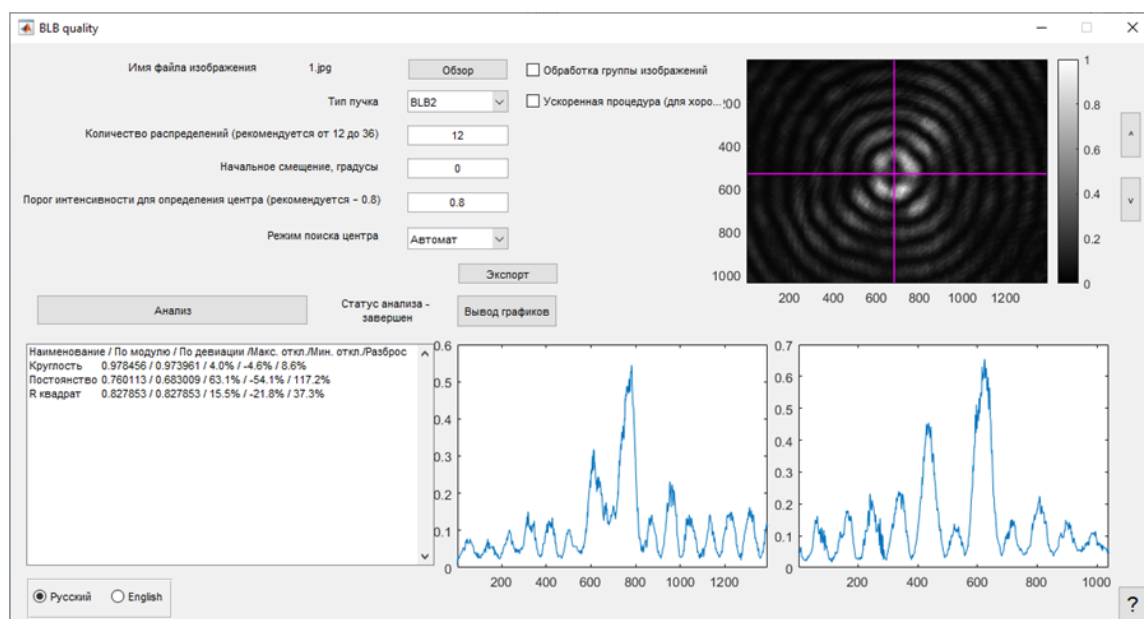


Рис. 5. Интерфейс программы для оценки параметров качества БСП

Экспериментальная оценка качества БСП_n. Предложенная методика оценки качества БСП_n практически опробована на примере анализа качества БСП₁, формируемых из излучения ППЛМ и ЛГН с использованием кристаллов КТР (КТiOPO₄) и КGW (KGd(WO₄)₂) методом, предложенным в [14] (см. рис. 6) посредством специально разработанной нами компьютерной программы, реализующей описанный метод оценки качества БСП_n. Расстояние между основанием аксикона и CCD-камерой (плоскостью регистрации) обозначается координатой z .

Проанализировав поперечные распределения интенсивности для различных z , мы получили пространственные распределения интенсивности, а также зависимости параметров качества БСП₁ от продольной координаты для следующих комбинаций источников излучения и кристаллов: КGW + HeNe, КТР + HeNe, КТР + ППЛМ (рис. 7). Видно, что при использовании ЛГН коэффициент круглости k_k^σ и R^2 при $z > 85$ мм не так резко уменьшаются, как в случае ППЛМ, круглость пучка и его соответствие теоретическому БСП₁, описываемому функцией Бесселя, сохраняются. Кроме того, коэффициент постоянства k_n^σ для ЛГН при $z > 50$ мм уменьшается быстрее, чем для ППЛМ.

Таким образом, предложены дополнения к методике оценки качества БСП₀, позволяющие проводить анализ качества БСП₁. Экспериментально показано, что предложенная процедура позволяет характеризовать качество экспериментальных БСП₁. Построены зависимости параметров качества БСП₁ от продольной координаты для пучков, формируемых из излучения ППЛМ и ЛГН с использованием кристаллов КТР и КGW. Показано, что пучок, формируемый из ЛГН, сохраняет круглость и соответствие формы идеальному БСП₁ на большем расстоянии от аксикона, чем ППЛМ, но при этом быстрее теряет постоянство интенсивности первого кольца.

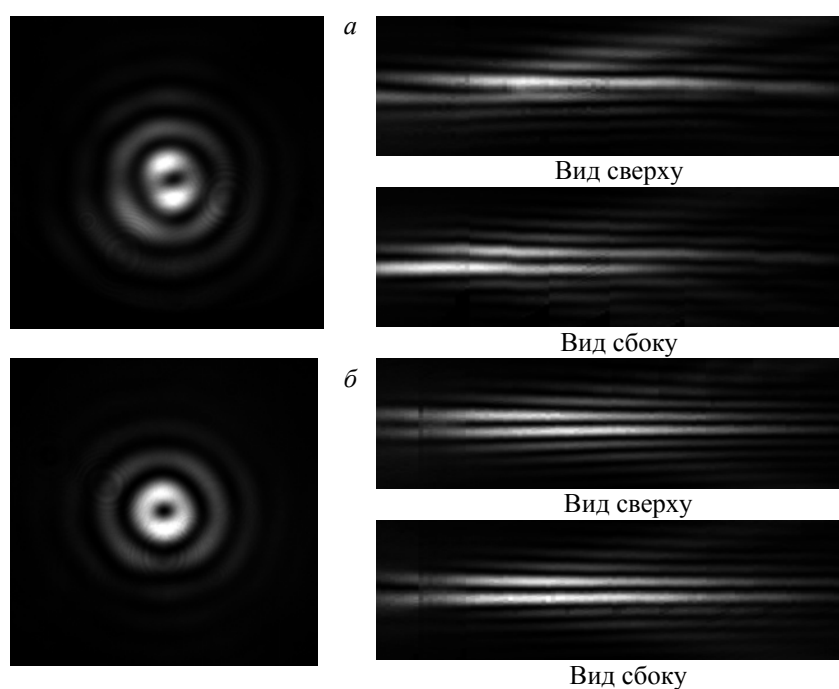


Рис. 6. Пространственные распределения интенсивности в БСП₁, сформированном из излучения ЛГН, поперечное распределение $z = 30$ мм, a — KGW, $б$ — КТР

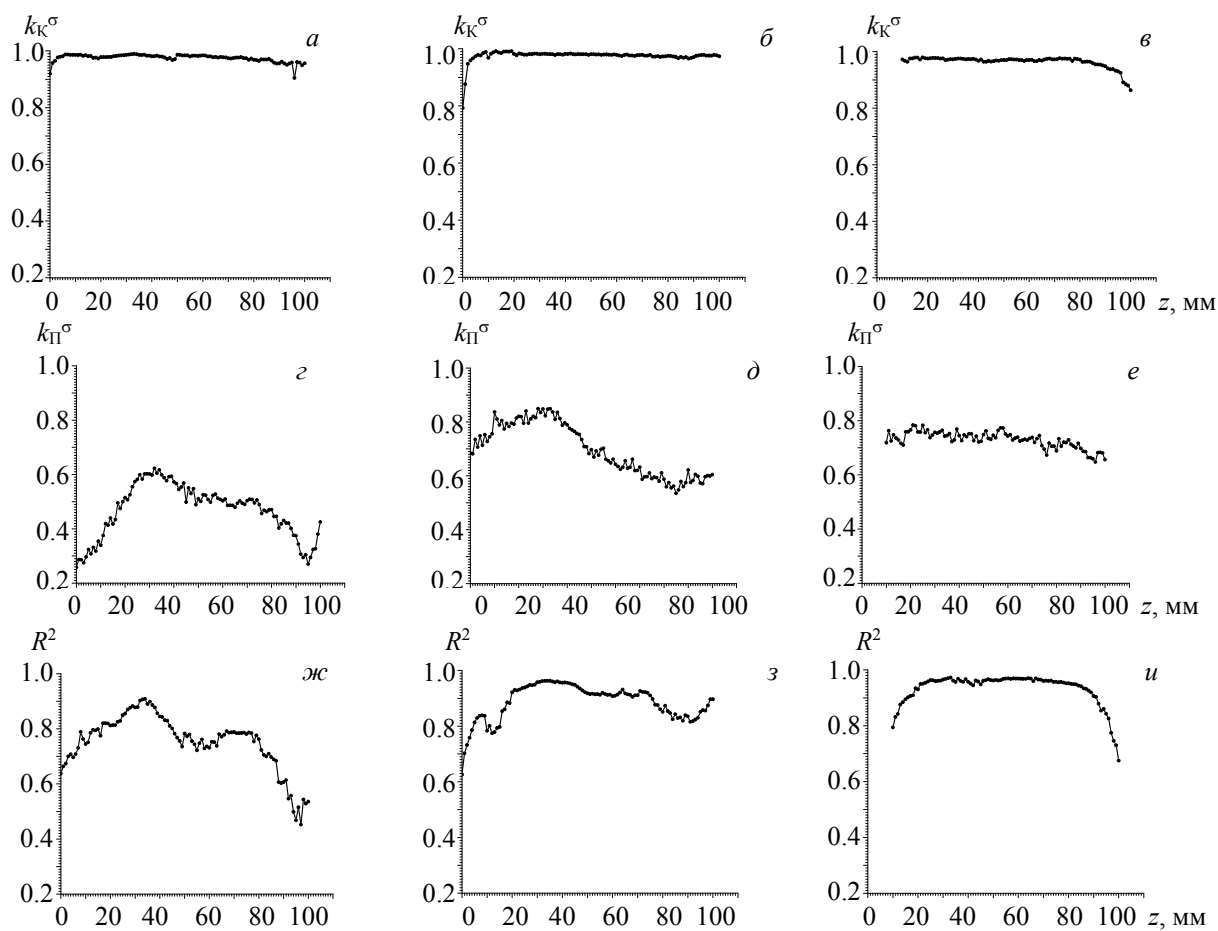


Рис. 7. Параметры качества БСП₁, вычисленные по средним квадратичным отклонениям для различных экспериментов: KGW+ЛГН ($a, з, ж$), КТР+ЛГН ($б, д, з$) и КТР+ППЛМ ($в, е, и$)

Из численных параметров качества БСП₁ (см. рис. 7) следует вывод, что с помощью кристалла КТР можно получить более качественные по сравнению с кристаллом KGW БСП₁ почти во всем диапазоне существования пучка по продольной координате.

Заключение. Предложены модификации методики определения качества бесселевых пучков нулевого порядка БСП₀, необходимые для ее адаптации на более широкий класс пучков Бесселя высших порядков БСП_{*n*}. Спроектированы и имплементированы в виде компьютерной программы алгоритмы, реализующие предложенные модификации. Описаны и имплементированы алгоритмы оценки положения оси кольцевых пучков, а также оценки начального приближения для аппроксимации диаметральных распределений интенсивности квадратом функции Бесселя путем анализа спектральной плотности мощности диаметрального распределения. Показано, что с помощью разработанной компьютерной программы можно определять параметры качества БСП_{*n*} в конкретном поперечном сечении пучка посредством анализа графического файла с описанием поперечного распределения интенсивности данного БСП. Методика оценки качества БСП_{*n*} использована для анализа зависимостей качества БСП₁ от продольной координаты, формируемых из излучения полупроводникового и гелий-неонового лазеров с использованием кристаллов КТР и KGW. Предложенные параметры качества можно использовать для оптимизации оптической схемы с целью достижения заданного качества пучка в определенной пространственной области (рабочую область в зоне существования БСП_{*n*} можно выбирать в том диапазоне продольной координаты, где параметры качества БСП_{*n*} удовлетворяют требованиям, которые могут быть заданы численно).

Авторы выражают благодарность сотрудникам Института физики НАН Беларуси канд. физ.-мат. наук, доценту Н. А. Хило и д-ру физ.-мат. наук, профессору В. Н. Белому за чрезвычайно полезные замечания, высказанные в процессе обсуждения результатов работы.

Работа выполнена в рамках задания 1.1.01 “Разработка физических основ распространения и преобразования квазибездифракционных вихревых световых пучков нового типа в анизотропных, неоднородных и рассеивающих средах и создание на этой основе инновационных диагностических оптико-электронных устройств” (№ гос. рег. 20160091) ГПНИ “Фотоника, опто- и микроэлектроника” (2016—2020 гг.) и задания 1.1 “Разработка методов и устройств диагностики материалов, процессов и изделий в оптическом и терагерцовом диапазонах спектра и их применение для оптической связи, микроскопии и определения характеристик различных объектов” (№ гос. рег. 20210300 от 23.03.2021) ГПНИ “Фотоника и электроника для инноваций” (2021—2025 гг.).

- [1] J. Durnin. J. Opt. Soc. Am. A, **4**, N 4 (1987) 651—654
- [2] F. Gori, G. Guattari, C. Padovani. Opt. Commun., **64**, N 6 (1987) 491—494
- [3] R. Borghi, M. Santarsiero. Opt. Lett., **22** (1997) 262—264
- [4] R. M. Herman, T. A. Wiggins. Appl. Opt., **37** (1998) 3398—3400
- [5] G. Rousseau, D. Gay, M. Piché. Opt. Commun., **265**, N 1 (2006) 261—269
- [6] G. Rousseau, D. Gay, M. Piché. J. Opt. Soc. Am. A, **22**, N 1 (2005) 1274
- [7] G. Rousseau, D. Gay, M. Piché. Opt. Express, **13**, N 19 (2005) 7589
- [8] С. Н. Лосев. Получение и исследование нерасходящихся (бесселевых) пучков от полупроводниковых лазеров и светодиодов, дис. ... канд. физ.-мат. наук, СПб (2014)
- [9] H. Cheng. Opt. Commun., **475** (2020) 126213
- [10] ГОСТ Р ИСО 11145-2016. Оптика и фотоника. Лазеры и лазерное оборудование. Термины, определения и буквенные обозначения, Москва, Стандартинформ (2016)
- [11] ISO 11145:2016 Optics and photonics — Lasers and laser-related equipment — Vocabulary and symbols
- [12] А. А. Рыжевич, И. В. Балыкин, Т. А. Железнякова. Журн. прикл. спектр., **85**, № 1 (2018) 144—153 [A. A. Ryzhevich, I. V. Balykin, T. A. Zheleznyakova. J. Appl. Spectr., **85** (2018) 134—142]
- [13] И. В. Балыкин. Сб. науч. тр. междунар. школы-конф. молодых ученых и специалистов “Современные проблемы физики”, 4—6 ноября 2020 г., Ин-т физики НАН Беларуси, Минск (2020) 41—42
- [14] А. А. Рыжевич. Опт. журн., **68**, № 3 (2001) 54—55
- [15] И. В. Балыкин, В. А. Базылевич, Т. А. Железнякова, С. В. Солоневич, А. А. Рыжевич. Молодежь в науке-2015. Приложение к журналу Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, ч. 4 (2015) 3—11

-
- [16] **И. В. Балыкин, Т. А. Железнякова, А. А. Рыжевич.** Сб. науч. тр. междунар. школы-конф. молодых ученых и специалистов “Современные проблемы физики”, 13—15 июня 2018 г., Ин-т физики НАН Беларуси, Минск (2018) 71—75
- [17] **I. V. Balykin, A. A. Ryzhevich, A. G. Mashchenko V. E. Leparskii, N. A. Khilo.** Журн. прикл. спектр., **83**, спецвыпуск 6-16, ч. 3 (2016) 453—454
- [18] **J. MacQueen.** Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley (1967) 281—297
- [19] **Martin Ester, Hans-Peter Kriegel, Jörg Sander, Xiaowei Xu.** Proc. Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96), 1996, Eds Simoudis, Evangelos; Han, Jiawei; Fayyad, M. Usama, AAAI Press (1996) 226—231, CiteSeerX 10.1.1.121.9220. – ISBN 1-57735-004-9
- [20] http://www.mathworks.com/matlabcentral/files/3215/fit_ellipse.m.
- [21] **А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.** Интегралы и ряды, т. 2. Специальные функции, Москва, Физматлит (2003)
- [22] **W. Koepf.** Hypergeometric Summation: An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities, Braunschweig, Germany, Vieweg (1998)
- [23] **А. А. Рыжевич, И. В. Балыкин.** Сб. науч. тр. VI конгресса физиков Беларуси, 20—23 ноября 2017 г., Ин-т физики НАН Беларуси, Минск (2017) 371—372