

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Н. Н. Роговцов^{1*}, В. Я. Анисимов²

УДК 517.937,535.36,537.86.029,537.87;621.371

<https://doi.org/10.47612/0514-7506-2021-88-6-872-880>

¹ Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь; e-mail: rogovtsov@bntu.by

² Белорусский государственный университет информатики и электроники,
Минск, Беларусь; e-mail: anissimov@bsuir.by

(Поступила 30 августа 2021)

Получены новые аналитические представления для усеченных спектральных характеристик четырехточечной функции когерентности лазерного пучка излучения, распространяющегося в турбулентной среде. Эти представления верны для любого уровня флуктуаций показателя преломления воздуха. Для двух частных случаев они переходят в точные соотношения, выведенные ранее с использованием интегро-функционального уравнения для усеченной спектральной характеристики четырехточечной функции когерентности. Предложена конструктивная процедура получения приближенных аналитических выражений для самой четырехточечной функции когерентности лазерного пучка излучения, распространяющегося в турбулентной среде.

Ключевые слова: интегро-функциональное уравнение, турбулентная среда, флуктуации, четырехточечная функция когерентности, усеченные спектральные характеристики, виртуальные параметры инвариантного погружения, биективные связи, аналитическое представление, лазерный пучок.

New analytical representations for the truncated spectral characteristics of the four-point coherence function of a laser beam propagating in a turbulent medium are obtained. These representations are valid for any level of fluctuations of the refractive index in air. For two particular cases they turn into exact analytical representations previously derived by the authors with using of an integro-functional equation for truncated spectral characteristic of the four-point coherence function. A constructive procedure for obtaining approximate analytical expressions of the four-point coherence function of a laser beam propagating in a turbulent medium is proposed.

Keywords: integro-functional equation, turbulent medium, fluctuations, four-point coherence function, truncated spectral characteristics, virtual parameters of invariant embedding, bijective connections, analytical representations, laser beam.

Введение. Для решения целого ряда научных и научно-технических проблем передачи информации в открытых оптических системах связи, локации, геофизики, астрономии, акустики и диагностики биологических объектов необходимо установить закономерности процесса распространения волн (в частности, электромагнитных и акустических) в стохастических средах, свойства которых изменяются случайным образом в пределах пространственных масштабов, значительно меньших по сравнению с общей длиной распространения этих волн в них. Ситуация такого рода имеет место, например, при распространении лазерного излучения в турбулентной атмосфере Земли. Теоретиче-

ANALYTICAL REPRESENTATIONS FOR THE TRUNCATED SPECTRAL CHARACTERISTICS OF THE FOUR-POINT COHERENCE FUNCTION OF A LASER BEAM IN A TURBULENT MEDIUM

N. N. Rogovtsov^{1*}, V. Ya. Anissimov² (¹ Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus; e-mail: rogovtsov@bntu.by; ² Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk, Belarus; e-mail: anissimov@bsuir.by)

ское исследование процесса распространения электромагнитных волн в такой атмосфере можно свести к решению трех задач: моделирование стохастических процессов, описывающих изменение локальных физических, в частности оптических, характеристик самой атмосферы; вывод (в рамках некоторых физико-математических гипотез и допущений) уравнений для тех характеристик волновых полей в турбулентной атмосфере, которые можно найти с использованием экспериментальных методов; разработка точных, асимптотических, приближенных аналитических или численных методов решения данных уравнений. Эти три задачи общей проблемы изучения процесса распространения электромагнитного излучения в турбулентной атмосфере Земли, несмотря на более чем полувековую историю исследований, решены частично в силу своей сложности или неполной адекватности используемых методов их решения.

Первые фундаментальные исследования по решению первой задачи выполнены в работах [1—3]. Однако до настоящего времени проводятся уточнения классических моделей, описывающих локальные характеристики турбулентной атмосферы на приземных трассах и в ионосфере (см., например, [4, 5] и ссылки там). Поскольку локальные свойства турбулентной атмосферы изменяются случайным образом, при решении второй задачи, строго говоря, изначально приходится сталкиваться с необходимостью решения краевых задач для стохастических волновых уравнений или для их следствий, каковыми, в частности, являются стохастические уравнения Гельмгольца. Однако даже формальные строгие решения скалярных стохастических уравнений (волнового, Гельмгольца и даже существенно более простых) до сих пор не получены. Сведения об общих математических свойствах стохастических дифференциальных уравнений и сложностях получения их явных строгих решений изложены, например, в [6—10]. В связи с наличием такого рода трудностей при решении проблемы распространения электромагнитного (лазерного) излучения на достаточно большие расстояния для случая мелкомасштабных флуктуаций в турбулентной атмосфере с учетом незначительного обратного рассеяния при переходе от соответствующих стохастических дифференциальных уравнений к динамическим дифференциальным уравнениям для различных статистических моментов волновых полей применялись различные методы [10, 11]. Эти методы позволили получить замкнутые динамические дифференциальные уравнения для статистических моментов любого порядка. С учетом наличия экспериментальных методов [12] нахождения статистических моментов предпринимались попытки решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют. Получение решений данных задач относится к третьей составляющей вышеуказанной проблемы. В ряде работ (см., например, [13—15] и ссылки там) получены решения соответствующих краевых задач для статистических моментов первого и второго порядков. Однако для нахождения отношений типа сигнал/шум необходимо найти момент четвертого порядка, т. е. фактически отыскать четырехточечную функцию когерентности $\Gamma_{22}(\dots)$ [3]. К сожалению, для отыскания функции $\Gamma_{22}(\dots)$, которая, вообще говоря, для случая ограниченных лазерных пучков излучения является функцией девяти скалярных переменных, не удалось предложить достаточно обоснованных математических методов и алгоритмов. В частности, в работах [15—20] при нахождении данной функции использовались только приближенные и численные методы. Исключением является работа [21], в которой выведено новое интегро-функциональное уравнение для четырехмерного образа по Фурье (он имеет смысл усеченной спектральной характеристики) от четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\dots)$ лазерного пучка излучения в турбулентной атмосфере. Данное уравнение получено на основе ряда эвристических процедур метода редукции общих соотношений инвариантности (GIRRM), который является одним из общих и эффективных методов решения многомерных задач теории переноса излучения, оптики рассеивающих сред и математической физики (см., например, [21—30] и ссылки там). Посредством анализа структуры этого уравнения в [21] впервые найдены в явной форме точные аналитические представления для семейства интегральных характеристик функции $\Gamma_{22}(\dots)$.

В настоящей работе показано, что интегро-функциональное уравнение (13) из работы [21] можно также эффективно использовать для получения различных аналитических представлений как для усеченных спектральных характеристик функции $\Gamma_{22}(\dots)$, так и для самой функции.

Постановка задачи. Рассмотрим замкнутое полупространство $[V]$, на границе S которого расположена плоскость OXY прямоугольной декартовой правой системы координат $OXYZ$. Ось Z направим внутрь полупространства $[V]$. Пусть $[V]$ заполнено случайно неоднородной средой, свойства которой идентичны свойствам некоторой прозрачной части турбулентной атмосферы Земли. На любой плоскости $z = \text{const}$ ($\text{const} \geq 0$) возьмем четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 , положения которых определяются радиусами-векторами $\mathbf{r}_1 = (p_{11}, p_{12}, z)$, $\mathbf{r}_2 = (p_{21}, p_{22}, z)$, $\mathbf{r}_1' = (p'_{11}, p'_{12}, z)$, $\mathbf{r}_2' = (p'_{21}, p'_{22}, z)$; далее использу-

ем обозначения: $\mathbf{p}_1 = (p_{11}, p_{12})$, $\mathbf{p}_2 = (p_{21}, p_{22})$, $\mathbf{p}'_1 = (p'_{11}, p'_{12})$, $\mathbf{p}'_2 = (p'_{21}, p'_{22})$. Предположим, что полубесконечная среда облучается монохроматическим линейно поляризованным пучком излучения, проекции напряженности электрического поля которого на оси X и Y могут быть записаны в виде $e^{i(\omega t - kz)}U(\mathbf{p}; z)$, где i — мнимая единица; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны излучения; ω — круговая частота излучения; $U(\mathbf{p}; z)$ — комплексная амплитуда, которая является случайной функцией и незначительно изменяется на расстояниях порядка длины волны излучения; $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ — двумерный вектор, параллельный плоскости OXY . Считаем, что мощность пучка — конечная величина, и он является почти финитным (фактически ограниченным в любом его поперечном сечении), отношение λ/a удовлетворяет неравенству $\lambda/a \ll 1$ (a — точная верхняя грань множества длин хорд, соединяющих любые две точки границы поперечного сечения такого пучка лазерного излучения, равная удвоенному эффективному радиусу этого сечения). Полагаем также, что центр поперечного сечения исходного пучка лазерного излучения лежит на оси Z и комплексная амплитуда пучка для любых конечных $z \in [0, +\infty)$ допускает оценку $U(\mathbf{p}; z) = O[\exp(-w_0|\mathbf{p}|)]$ при $|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty$ (w_0 — некоторое положительное конечное число, имеющее размерность $[L^{-1}]$, обратную размерности длины $[L]$). Кроме того, считаем, что объем известной информации о когерентных свойствах пучка излучения достаточен для задания четырехточечной функции когерентности $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z)$ [31, 32] на плоскости $z = 0$ в системе $OXYZ$:

$$\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z) = \langle U(\mathbf{p}_1; z)U(\mathbf{p}_2; z)U^*(\mathbf{p}'_1; z)U^*(\mathbf{p}'_2; z) \rangle. \quad (1)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает операцию усреднения по ансамблю реализаций; $*$ — символ операции комплексного сопряжения; $U(\mathbf{p}_1; z)$, $U(\mathbf{p}_2; z)$, $U(\mathbf{p}'_1; z)$, $U(\mathbf{p}'_2; z)$ имеют смысл комплексных амплитуд волнового поля на плоскости, задаваемой аппликотой z и параллельной плоскости OXY , в точках M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно.

В исходное дифференциальное уравнение в частных производных, решением которого является функция $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z)$ (см., например, [21, 31—33]), входят вторые частные производные по всем переменным $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, p'_{11}, p'_{12}, p'_{21}, p'_{22}$ и частная производная первого порядка по переменной z . Пусть функция $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; 0)$, описывающая свойства исходного пучка лазерного излучения на плоскости OXY и задающая одно из граничных условий для искомой функции $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z)$, имеет непрерывные частные производные до n -го порядка ($n \geq 2$) включительно по всем переменным $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, p'_{11}, p'_{12}, p'_{21}, p'_{22}$. Тогда естественно искать решение краевой задачи для исходного дифференциального уравнения для функции $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z)$ в классе функций, которые имеют непрерывную производную по переменной z ($z \in [0, +\infty)$), непрерывные частные производные до n -го порядка включительно по всем переменным $p_{11}, p_{12}, \dots, p'_{21}, p'_{22}$. При этом в качестве второго краевого условия для функции $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z)$ берем оценку $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; z) = O(\exp(-w_0(|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2| + |\mathbf{p}'_1| + |\mathbf{p}'_2|)))$, когда хотя бы одна из величин $|\mathbf{p}_1|, |\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}'_1|, |\mathbf{p}'_2|$ стремится к $+\infty$ (указанные выше пучки автоматически удовлетворяют этому условию). В рамках сделанных допущений получены аналитические представления для усеченных спектральных характеристик функции $\Gamma_{22}(\dots)$ и самой функции.

Аналитические представления. Интегро-функциональное уравнение (13) из [21] имеет вид:

$$\begin{aligned} & \overline{\Gamma}_{22}^{\times}(\widetilde{\omega}_1 - \widetilde{z}(\gamma + \zeta), \widetilde{\omega}_2 - \widetilde{z}(\gamma - \zeta), \zeta, \gamma; k\widetilde{z}/2) = \exp\left(-f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \widetilde{z}; \xi, \alpha)\right) \times \\ & \times \left[\overline{\Gamma}_{22}^{\times}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; 0) - 2\pi k^3 \int_0^{\widetilde{z}} \exp\left(f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \widetilde{z}'; \xi, \alpha)\right) g(\sigma, \theta, \zeta, \gamma; k\widetilde{z}'/2; \xi, \alpha) d\widetilde{z}' \right] = \\ & = \exp\left(-f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \widetilde{z}; \xi, \alpha)\right) \overline{\Gamma}_{22}^{\times}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; 0) - B_0(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \widetilde{z}; \xi, \alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{cases} \widetilde{z} = 2k^{-1}z, \widetilde{\omega}_1 = \omega_1 + 2k^{-1}z(\gamma + \zeta), \widetilde{\omega}_2 = \omega_2 + 2k^{-1}z(\gamma - \zeta), \\ \omega_s = \rho_s - \rho'_s, \tau_s = \rho_s + \rho'_s, s \in \{1, 2\}, \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2, \\ \rho_1 = 2^{-1}(\omega_1 + 2^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{p})), \quad \rho_2 = 2^{-1}(\omega_2 + 2^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{u})), \\ \rho'_1 = 2^{-1}(2^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{p}) - \omega_1), \quad \rho'_2 = 2^{-1}(2^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{u}) - \omega_2), \\ \sigma = \widetilde{\omega}_1 - \widetilde{z}'(\gamma + \zeta), \quad \theta = \widetilde{\omega}_2 - \widetilde{z}'(\gamma - \zeta); \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^{\times}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{u}, \mathbf{p}; z) = \Gamma_{22}(\rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2; z), \\ \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i((\zeta \cdot \mathbf{u}) + (\gamma \cdot \mathbf{p}))) \times \\ \times \Gamma_{22}^{\times}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{u}, \mathbf{p}; z) du_1 du_2 dp_1 dp_2; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g(\sigma, \theta, \zeta, \gamma; k\tilde{z}'/2; \xi, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(2\eta; k\tilde{z}'/2) \left[\cos((\eta \cdot (\sigma - \theta))) - \cos((\eta \cdot (\sigma + \theta))) \right] \times \\ &\times \left[\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\sigma, \theta, \zeta - \eta, \gamma; k\tilde{z}'/2) - \xi \cos((\eta \cdot \alpha)) \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\sigma, \theta, \zeta, \gamma; k\tilde{z}'/2) \right] d\eta_1 d\eta_2, \\ \eta &= (\eta_1, \eta_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; \xi, \alpha) = \frac{k^3}{16} \int_0^{\tilde{z}} \chi_1(\widetilde{\omega}_1 - \tilde{z}''(\gamma + \zeta), \widetilde{\omega}_2 - \tilde{z}''(\gamma - \zeta); k\tilde{z}''/2; \xi, \alpha) d\tilde{z}'', \quad (6)$$

$$\chi_1(\sigma', \theta', k\tilde{z}''/2; \xi, \alpha) = 8\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; k\tilde{z}''/2) \chi_1(\sigma', \theta'; \mathbf{q}; \xi, \alpha) dq_1 dq_2,$$

$$\sigma' = \widetilde{\omega}_1 - \tilde{z}''(\gamma + \zeta), \quad \theta' = \widetilde{\omega}_2 - \tilde{z}''(\gamma - \zeta), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2),$$

$$\begin{aligned} \chi_1(\sigma', \theta'; \mathbf{q}; \xi, \alpha) &= 1 + \xi \cos\left(\frac{(\mathbf{q} \cdot \alpha)}{2}\right) \cos\left(\frac{(\mathbf{q} \cdot (\sigma' - \theta'))}{2}\right) - \\ &- \cos\left(\frac{(\mathbf{q} \cdot (\sigma' + \theta'))}{2}\right) \left(\xi \cos\left(\frac{(\mathbf{q} \cdot \alpha)}{2}\right) + \cos\left(\frac{(\mathbf{q} \cdot (\sigma' - \theta'))}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Функция $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; z) = \text{const} \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}; z)$, где функция $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}; z)$ имеет смысл спектральной плотности флуктуаций диэлектрической проницаемости ε воздуха, которая с учетом соотношения $n = \sqrt{\varepsilon}$ непосредственно связана с плотностью флуктуаций показателя преломления n (const есть положительное число, которое определяется выбором форм записи прямого и обратного преобразований Фурье). Выражения типа $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{l})$ в (4)–(6) обозначают скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{l}$. Функция $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; z)$ удовлетворяет равенству $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; z) = \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(-\mathbf{q}; z)$, которое автоматически выполняется, когда $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; z) = \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(|\mathbf{q}|; z)$. Отметим, что величина z и компоненты двумерных вещественных векторов $\omega_1, \omega_2, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2, \tau_1, \tau_2, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \sigma, \theta, \sigma', \theta', \alpha$ имеют размерность длины [L], а компоненты векторов $\xi, \gamma, \mathbf{q}$ — размерность [L⁻¹].

В (2), (5) и (6) величина ξ и компоненты α_1, α_2 вектора α являются произвольными вещественными числами, от которых решение уравнения (2) не зависит. Однако от данных “виртуальных” параметров инвариантного погружения зависят значения членов, входящих в правую часть интегро-функционального уравнения (2). Эти параметры при отыскании приближенных или асимптотических аналитических решений данного уравнения следует брать такими, чтобы в (2) модуль комплексно-значной функции $g(\sigma, \theta, \zeta, \gamma; k\tilde{z}'/2; \xi, \alpha)$ принимал значения, существенно меньшие по сравнению с модулем данной функции, когда параметры ξ, α не используются, т. е. $\xi = 0$ и $\alpha = \mathbf{0} = (0, 0)$.

Положим $\xi = 1$ и $\alpha = \mathbf{0}$ в (2). Тогда с учетом (3), четности косинуса, равенства $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}; z) = \Phi_{\varepsilon}(-\mathbf{q}; z)$ и в силу существования равномерно ограниченных и непрерывных частных производных первого и второго порядков от комплексно-значной функции $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\sigma, \theta, \zeta - \eta, \gamma; k\tilde{z}'/2)$ по вещественным переменным (η_1, η_2) уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; k\tilde{z}/2) = \exp\left(-f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0})\right) \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; 0) - B_1(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
B_1(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}) &= 2\pi k^3 \int_0^{\tilde{z}} \exp\left(-\left(f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0}) - f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}'; 1, \mathbf{0})\right)\right) d\tilde{z}' \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(2\mathbf{\eta}; k\tilde{z}'/2) [\cos((\mathbf{\eta} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\theta}))) - \cos((\mathbf{\eta} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\theta})))] \times \\
&\times \left[\frac{1}{2} d_{\mathbf{\eta}^{\Delta}}^2 \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \zeta - \mathbf{\eta}^{\Delta}, \gamma; k\tilde{z}'/2) \right] d\eta_1 d\eta_2 = B_0(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0}).
\end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega}_1 - (\tilde{z} - \tilde{z}')(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\zeta})$; $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_2 - (\tilde{z} - \tilde{z}')(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\zeta})$; $\mathbf{\eta}^{\Delta} = (\eta_1^{\Delta}, \eta_2^{\Delta}) = c\mathbf{\eta}$ (безразмерный параметр $c \in (0, 1)$); $d_{\mathbf{\eta}^{\Delta}}^2(\dots)$ — дифференциал второго порядка от комплексно-значной функции $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \zeta - \mathbf{\eta}^{\Delta}, \gamma; k\tilde{z}'/2)$ по переменным $(\eta_1^{\Delta}, \eta_2^{\Delta})$ в некоторой “точке” $\mathbf{\eta}^{\Delta} = (c\eta_1, c\eta_2)$. Данный дифференциал с учетом определений функций $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\dots)$, $\overline{\Gamma_{22}}(\dots)$ и биективных связей между различными величинами (см. формулы (3) и (4)) можно выразить через четырехточечную функцию когерентности $\Gamma_{22}(\dots)$:

$$\begin{aligned}
d_{\mathbf{\eta}^{\Delta}}^2 \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \zeta - \mathbf{\eta}^{\Delta}, \gamma; k\tilde{z}'/2) &= \\
&= -\left(\frac{4}{\pi^2}\right) \exp\{-2i(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\omega}_2)\} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{\eta} \cdot \mathbf{y})^2 \exp\{i((\boldsymbol{\zeta} - c\mathbf{\eta} + \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{y})\} dy_1 dy_2 \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{4i(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x})\} \Gamma_{22}(\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2, \boldsymbol{\Lambda}_3, \boldsymbol{\Lambda}_4; k\tilde{z}'/2) dx_1 dx_2,
\end{aligned} \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathbf{x} + 2^{-1}(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{y} + (\tilde{z} - \tilde{z}')(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\zeta}))$, $\boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathbf{x} + 2^{-1}(\tilde{z} - \tilde{z}')(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\zeta})$, $\boldsymbol{\Lambda}_3 = \mathbf{x} + 2^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 - (\tilde{z} - \tilde{z}') \times (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\zeta}))$, $\boldsymbol{\Lambda}_4 = \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_2 - 2^{-1}(\tilde{z} - \tilde{z}')(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\zeta})$.

Модуль функции $g(\dots)$ в уравнении (2), когда $\xi = 1$ и $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, равен модулю двукратного интеграла по переменным η_1, η_2 в формуле (8), в которой дифференциал второго порядка представлен в виде (9). Поэтому значение данного модуля в существенной мере зависит от функционального вида спектральной плотности $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(2\mathbf{\eta}; k\tilde{z}'/2)$ и величин, стоящих в квадратных скобках в (8). Опишем кратко ряд условий, при выполнении которых модуль функции $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \zeta, \gamma; k\tilde{z}'/2; 1, \mathbf{0})$ обращается в нуль или может принимать достаточно малые значения по сравнению со случаем $\xi = 0$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Во-первых, в уравнениях (2), (7) вторые слагаемые в правых частях обращаются в нуль при выполнении любых непротиворечивых условий:

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\theta} = \pm(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\theta}). \quad (10)$$

Применительно к уравнению (7) условия (10) соответствуют ситуациям $\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ — произвольный двумерный вектор; $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\omega}_2$ — произвольный двумерный вектор. При выполнении любого из этих условий функция $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \zeta, \gamma; z)$ равна первому члену в правой части (7). Условия такого рода использованы [21] для получения точных аналитических представлений для интегральных характеристик четырехточечной функции когерентности. Во-вторых, для конечных значений $\tilde{z}$ первые члены в правых частях уравнений (2), (7) являются главными членами асимптотик для функции $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\dots)$ (через нее непосредственно выражаются усеченные спектральные характеристики функций $\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\dots)$, $\overline{\Gamma_{22}}(\dots)$) для случаев: 1) $\boldsymbol{\omega}_1$ — произвольный вектор, $|\boldsymbol{\omega}_2| \rightarrow 0$, $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\zeta}| \rightarrow 0$; 2) $\boldsymbol{\omega}_2$ — произвольный вектор, $|\boldsymbol{\omega}_1| \rightarrow 0$, $|\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\zeta}| \rightarrow 0$. В-третьих, в силу фактической поперечной ограниченности модельных и реальных лазерных пучков [34, 35] и наличия множителя $2^{-1}(\mathbf{\eta} \cdot \mathbf{y})^2$ в двукратном интеграле по переменным (y_1, y_2) в (9) и достаточно быстрого убывания неотрицательной вещественной функции $\Phi_{\varepsilon}^{\circ}(2\mathbf{\eta}; k\tilde{z}'/2)$ при возрастании $|\mathbf{\eta}|$ (см., например, [4, 10, 32]) может происходить существенное уменьшение модуля второго члена в правой части (7) по сравнению с ситуацией, когда в уравнении (2) вовсе не используются “виртуальные” параметры погружения ξ и $\boldsymbol{\alpha}$, т. е. когда в (2)

эти параметры заменены на нуль и нулевой вектор. Для указанных выше пучков интегрирование в правой части (9), по сути, должно выполняться только по части четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}_4$, если хотя бы один из модулей $|\Lambda_1|, |\Lambda_2|, |\Lambda_3|, |\Lambda_4|, |\Lambda_1 - \Lambda_2|, |\Lambda_1 - \Lambda_3|, |\Lambda_1 - \Lambda_4|, |\Lambda_2 - \Lambda_3|, |\Lambda_2 - \Lambda_4|, |\Lambda_3 - \Lambda_4|$ для заданного набора $(\omega_1, \omega_2, (\tilde{z} - \tilde{z}'), \gamma, \zeta)$ больше a . Если выполнено хотя бы одно из неравенств $|\Lambda_1 - \Lambda_3| > a, |\Lambda_2 - \Lambda_4| > a$, то правая часть (9) практически равна нулю, так как верно приближенное равенство $\Gamma_{22}(\dots) \approx 0$. Например, для случаев, когда $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \zeta = 0, \gamma$ — произвольный двумерный вектор, или $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \gamma = 0, \zeta$ — произвольный двумерный вектор, модуль $|\gamma|$ удовлетворяет неравенству $|\gamma| \leq 2a$. При наличии ограничений подобного типа на модуль $|\gamma|$ величина $B_1(\dots)$ в правой части (7) может принимать по модулю значения, существенно меньшие модуля второго слагаемого в правой части (2), когда $\xi = 0$ и $\alpha = 0$. Это подтверждает, что величина $B_1(\dots)$ в уравнении (7) может быть поправочным слагаемым к первому члену в его правой части, а само (7) можно использовать для получения различных аналитических представлений функций $\Gamma_{22}^{\times}(\dots), \Gamma_{22}^{\times}(\dots), \Gamma_{22}(\dots)$. Для обоснования данного утверждения выполнено сравнение модулей второго слагаемого в уравнении (2) для случаев $\xi = 1, \alpha = 0$ и $\xi = 0, \alpha = 0$. В качестве модельного пучка использован коллимированный гауссов пучок с радиусом когерентности, равным бесконечности, с нормально распределенным случайным полем и заданной корреляционной функцией $\Gamma_{11}(\dots)$. Функция $\Gamma_{22}(\dots)$ на плоскости, заданной уравнением $z = 0$, представлена в виде [17, 19]:

$$\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; 0) = \Gamma_{11}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1; 0) \Gamma_{11}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2; 0) + \Gamma_{11}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_2; 0) \Gamma_{11}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1; 0). \quad (11)$$

Выбор такого модельного пучка обусловлен рядом причин: 1) относительной простотой аналитического представления функции $\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; 0)$ для него; 2) в рамках квадратичного приближения структурной функции показателя преломления функция $\Gamma_{22}(\dots)$ сохраняет свой функциональный вид для произвольных значений z ; 3) возможностью реализации значительной части преобразований и оценок кратных интегралов, входящих в (2), (7)—(9), аналитически. Для иллюстрации эффективности сделанного выбора “виртуальных” параметров в (8) выполнены оценки модуля отношения

$$\beta = \frac{B_0(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, 0)}{B_0(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 0, 0)}$$

для модифицированного спектра Кармана [4] в случае $\zeta = 0$. На рис. 1 пред-

ставлены зависимости модулей отношений β от эффективного радиуса поперечного сечения гауссова пучка b для различных значений c . При этом предполагалось выполнение условий: $L_0 = 24l_k$; $|\omega_1 - \omega_2| = 2l_k$; $|\omega_1 + \omega_2 - 2\tilde{z}\gamma| = 2.449l_k$; $b = a/2 = 0.05l_k \div 0.6l_k$; $l_0 = 0.04l_k$; l_0, L_0 и l_k — внутренний, внешний и поперечный масштабы турбулентности соответственно [12]; l_k полагалось 0.08 м.

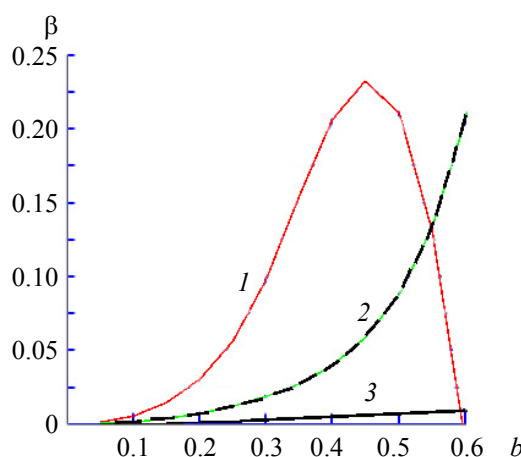


Рис. 1. Зависимость модуля β от эффективного радиуса пучка b , $c = 1$ (1), 0.5 (2) и 0.2 (3)

Из рис. 1 видно, что для выбранных “виртуальных” параметров ξ, α и используемых ограниченных лазерных пучков [12, 34, 35] существует непустое множество реализуемых величин $L_0, l_0, \omega_1, \omega_2, a, \tilde{z}, \gamma$, в рамках которого отношение β по модулю почти на порядок и более меньше единицы. С уче-

том этих фактов и принятых выше допущений относительно исходных моделей лазерных пучков из (2) и (7) получаем аналитические представления для усеченной спектральной характеристики функции $\Gamma_{22}^{\times}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{u}, \mathbf{p}; z)$:

$$\overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) \approx \overline{\Gamma_{22,0}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) = \exp\left\{-f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0})\right\} \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; 0); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^{\times}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) &\approx \overline{\Gamma_{22,1}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) = \overline{\Gamma_{22,0}^{\times}}(\omega_1, \omega_2, \zeta, \gamma; z) - \\ &- 2\pi k^3 \int_0^{\tilde{z}} \exp\left\{-\left(f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0}) - f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}'; 0)\right)\right\} d\tilde{z}' \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(2\eta; k\tilde{z}'/2) \left[\cos(\eta \cdot (\omega_1 - \omega_2 + 2(\tilde{z} - \tilde{z}')\zeta)) - \right. \\ &\left. - \cos(\eta \cdot (\omega_1 + \omega_2 + 2(\tilde{z} - \tilde{z}')\gamma)) \right] \times \left[\exp\left\{-f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta - \eta, \gamma; \tilde{z}'; 1, \mathbf{0})\right\} \times \right. \\ &\left. \times \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta - \eta, \gamma; 0) - \exp\left\{f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}'; 1, \mathbf{0})\right\} \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; 0) \right] d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned} \quad (13)$$

При выполнении любого из условий (10) знак $\approx$ в (11) и (12) можно заменить на знак равенства. Отметим, что аргументы экспонент в (11), (12) неположительные, поскольку имеют место равенства:

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0}) &= \frac{\pi k^3}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}''; k\tilde{z}''/2) \left[\sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}'' \cdot \omega_1^{\times})\right) + \sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}'' \cdot \omega_2^{\times})\right) \right]^2 dq_1'' dq_2'', \\ f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}; 1, \mathbf{0}) &- f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; \tilde{z}'; 1, \mathbf{0}) = \\ &= \frac{\pi k^3}{2} \int_{\tilde{z}'}^{\tilde{z}} d\tilde{z}'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}''; k\tilde{z}''/2) \left[\sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}'' \cdot \omega_1^{\times})\right) + \sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}'' \cdot \omega_2^{\times})\right) \right]^2 dq_1'' dq_2'', \end{aligned} \quad (14)$$

где $\omega_1^{\times} = \omega_1 + (\tilde{z} - \tilde{z}'')(\gamma + \zeta)$, $\omega_2^{\times} = \omega_2 + (\tilde{z} - \tilde{z}'')(\gamma - \zeta)$. Формулы (14) получены элементарными преобразованиями функции $f(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \zeta, \gamma; h; 1, \mathbf{0})$, в которой аргумент h равен $\tilde{z}$ или $\tilde{z}'$ ($\tilde{z} \in [0, \tilde{z}]$).

Соотношения (11)–(14) можно использовать для нахождения ряда аналитических представлений для усеченных спектральных характеристик функций $\Gamma_{22}(\dots)$, а также самой функции. Для иллюстрации утверждения запишем простейшие аналитические представления такого рода, которые в рамках описанных допущений получены на основе (11). В частности, имеют место аналитические представления:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[(\gamma - \zeta) \cdot \mathbf{x}] + i[(\gamma + \zeta) \cdot \mathbf{y}]\} \overline{\Gamma_{22}^{\times}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{b}; z) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \approx \\ &\approx \exp\left\{-2^{-1}\tilde{z}(|\gamma|^2 - (\gamma \cdot \zeta))\right\} \exp\{-A_0\} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[(\gamma - \zeta) \cdot \mathbf{x}] + i[(\gamma + \zeta) \cdot \mathbf{y}]\} \times \\ &\times \Gamma_{22}(\mathbf{y} + 2^{-1}\tilde{z}\zeta, \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{a} - 2^{-1}\tilde{z}\gamma, \mathbf{x} - \mathbf{b} - 2^{-1}\tilde{z}(\gamma - \zeta); 0) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, \\ &\Gamma_{22}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{b}; z) \approx (1/16\pi^4) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-((\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}_2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1))i\} \exp\{A_1\} \times \\ &\times \exp\{(-4^{-1}\tilde{z}((\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}))i)\} dm_1 dm_2 dn_1 dn_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{((\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}') + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}'))i\} \mathfrak{H} dx_1' dx_2' dy_1' dy_2'. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\mathfrak{H}$ обозначена функция $\Gamma_{22}(\mathbf{y}' - 4^{-1}\tilde{z}(\mathbf{n} - \mathbf{m}), \mathbf{x}', \mathbf{y}' - 4^{-1}\tilde{z}(\mathbf{n} + \mathbf{m}) - \mathbf{a}, \mathbf{x}' - 2^{-1}\tilde{z}\mathbf{m} - \mathbf{b}; 0)$, а под символом A_0 понимается выражение

$$\begin{aligned} &\frac{\pi k^3}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}^{\circ}(\mathbf{q}''; k\tilde{z}''/2) \left[\sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}''(\mathbf{a} + 2^{-1}(\tilde{z} - \tilde{z}'')(\gamma + \zeta)))\right) + \right. \\ &\left. + \sin\left(2^{-1}(\mathbf{q}''(\mathbf{b} + 2^{-1}(\tilde{z} - \tilde{z}'')(\gamma - \zeta)))\right) \right]^2 dq_1'' dq_2'', \end{aligned} \quad (16)$$

$\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные двумерные векторы, каждая компонента которых имеет размерность $[L]$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$; величина A_1 задается правой частью выражения (16), в котором векторы $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\zeta}$ заменены на векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Заключение. Аналитические представления (11)–(16) обобщают и конкретизируют результаты, полученные в [21], и позволяют в явной (точной или приближенной) аналитической форме находить важные величины, описывающие статистические характеристики ограниченных пучков лазерного излучения, распространяющихся в турбулентной атмосфере Земли. В частности, на основе полученных аналитических представлений можно найти усеченные спектральные характеристики четырехточечной функции когерентности, ее саму и индекс мерцаний [10] для конкретных типов модельных пучков. Эвристические идеи метода редукции общих соотношений инвариантности [25, 27, 29], использованные в [21] при выводе уравнения (2), позволяют получать различные аналоги данного уравнения на основе иных разбиений и представлений слагаемых, входящих в дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для четырехточечной функции когерентности. Это расширяет возможности поиска более точных аналитических представлений для усеченных спектральных характеристик четырехточечной функции когерентности и ее самой. Предлагаемый подход допускает обобщение на случай статистических моментов любого порядка и позволяет получать точные и приближенные аналитические представления для них.

- [1] А. Н. Колмогоров. Докл. АН СССР, **30**, № 4 (1941) 299—303
- [2] А. М. Обухов. Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., **13**, № 1 (1949) 58—69
- [3] Ю. Я. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский. УФН, **102**, № 9 (1970) 3—42
- [4] L. C. Andrews. Field Guide to Atmospheric Optics, Bellingham, Washington, USA SPIE Press (2019) 10—13
- [5] В. П. Лукин, В. В. Носов, Е. В. Носов, А. В. Торгаев. Успехи совр. естествознания, № 12-4 (2014) 369—377
- [6] С. Н. Бернштейн. Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **5** (1934) 95—124
- [7] С. Ватанабэ, Н. Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., Москва, Наука (1986)
- [8] В. И. Кляцкин. Стохастические уравнения глазами физика, Москва, Физматлит (2001)
- [9] А. А. Леваков, М. М. Васильковский. Стохастические дифференциальные уравнения и включения, Минск, БГУ (2019) 6—472
- [10] В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере, Москва, Наука (1967) 143—157
- [11] В. И. Кляцкин. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах, Москва, Наука (1980)
- [12] М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов. В сб. “Распространение лазерного пучка в атмосфере”, под ред. Д. Стробена, Москва, Мир (1981) 130—167
- [13] Д. Стробен. В сб. “Распространение лазерного пучка в атмосфере”, под ред. Д. Стробена, Москва, Мир (1981) 61—105
- [14] Л. С. Долин. Изв. вузов. Радиофизика, **7**, № 3 (1964) 559—562
- [15] B. J. Ucsinski. J. Opt. Soc. Am. A, **2** (1985) 2077—2091
- [16] J. Gozani. J. Opt. Soc. Am. A, **2** (1985) 2144—2151
- [17] J. Garnier, K. Solna. Commun. Partial Differ. Eq., **39** (2014) 626—650
- [18] W. J. Brown. J. Opt. Soc. Am., **62** (1972) 966—971
- [19] Zheng-Wen Xu, Jian Wu, Zhen-Sen Wu. IEEE Transact. Antenn. Propagat., **55**, N 6 (2007) 1613—1621
- [20] C. Macaskill. Proc. R. Soc. London Ser. A, **386** (1983) 461—474
- [21] Н. Н. Роговцов, В. Я. Анисимов. Журн. прикл. спектр., **87**, № 2 (2020) 204—211 [N. N. Rogovtsov, V. Y. Anisimov. J. Appl. Spectr., **87** (2020) 221—228]
- [22] Н. Н. Роговцов. Журн. прикл. спектр., **35**, № 6 (1981) 1044—1050
- [23] Н. Н. Роговцов. Изв. АН СССР. Физика атм. и океана, **21**, № 10 (1985) 1111—1112
- [24] Н. Н. Роговцов. Журн. прикл. спектр., **43**, № 1 (1985) 142—148

-
- [25] **Н. Н. Роговцов.** Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению проблем математической физики, ч. 1, Минск, МО РБ, БГПА (1999) 283—374
- [26] **Н. Н. Роговцов.** Диф. уравнения, **44**, № 9 (2008) 1205—1221
- [27] **N. N. Rogovtsov.** Light Scattering Reviews, **5** (2010) 243—327
- [28] **Н. Н. Роговцов.** Диф. уравнения, **51**, № 5 (2015) 650—662
- [29] **N. N. Rogovtsov, F. Borovik.** J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **183** (2016) 128—153
- [30] **N. N. Rogovtsov.** ASP Conf. Series, San Francisco, Astronomical Society of the Pacific, **511** (2017) 276—281
- [31] **С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский.** Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Случайные поля, Москва, Наука (1978)
- [32] **А. Исимару.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, **2**, Москва, Мир (1981)
- [33] **Z. C. Chen, P. Li, J. Pu Ding, D. Zhao.** Appl. Phys. B, **107**, N 2 (2012) 469—472
- [34] **S. N. Kurilkina, V. N. Belyi, N. S. Kazak.** Opt. Commun., **283** (2010) 3860—3868
- [35] **Д. А. Маракасов, Д. С. Рычков.** Опт. атм. и океана, **29**, № 4 (2016) 317—322